

## INTRODUCCION

El electromagnetismo desempeña un papel importante en la vida moderna, tales como los aparatos eléctricos que se emplean en la industria, la investigación y en el hogar. Los generadores, motores, transformadores, interruptores de circuitos, los aparatos de TV, etc. utilizan los efectos magnéticos producidos por el flujo de corriente y están compuestos por circuitos eléctricos y electrónicos.

Un circuito es una red eléctrica (interconexión de dos o más componentes, tales como resistencias, inductores, capacitores, fuentes, interruptores y semiconductores) que contiene al menos una trayectoria cerrada. Los circuitos que contienen solo fuentes, componentes lineales (resistores, capacitores, inductores), y elementos de distribución lineales (líneas de transmisión o cables) pueden analizarse por métodos algebraicos para determinar su comportamiento en corriente directa o en corriente alterna. Estas redes son generalmente no lineales y requieren diseños y herramientas de análisis mucho más complejos (Faleski, 2006).

Un circuito RLC es un circuito eléctrico que consiste de un resistor, un inductor y un capacitor, conectados en serie o en paralelo. El circuito forma un oscilador armónico de corriente y resonará exactamente de la misma forma que un circuito LC. La diferencia que provoca la presencia de un resistor es que cualquier oscilación inducida en el circuito cesará en el tiempo, si no se conecta a una fuente de energía, llamado oscilación forzada. La resistencia es inevitable en los circuitos reales, aún si el resistor no se incluye específicamente como componente de un circuito. Por tanto, un circuito LC puro es un ente ideal (Faleski, 2006).

Los circuitos eléctricos RLC tienen una importancia fundamental en la Ingeniería Eléctrica debido a que muchos problemas se solucionan con este tipo de circuitos, conociendo las leyes y relaciones matemáticas que lo rigen.

Existen muchas aplicaciones del circuito RLC tales como en circuitos osciladores o variables de sintonización, filtros de audiofrecuencias (pasa baja, pasa alto y pasa banda) y circuitos de pulso de descarga.

Los circuitos RLC se emplean en diferentes tipos de circuitos osciladores. La sintonización es otra aplicación importante, tales como un receptor de radio o televisor, donde los circuitos RLC se usan para seleccionar un rango estrecho de frecuencias de las ondas de radio ambientales, esto se refiere a un circuito de sintonización. Un circuito RLC puede emplearse como un filtro pasa banda, donde la aplicación de la sintonización es un ejemplo de filtro de pasa banda. El filtro RLC puede describirse como un circuito de segundo orden en el análisis de circuitos, debido a que cualquier voltaje o corriente en el mismo puede describirse por una ecuación diferencial de segundo orden (Agarwal y Lang, 2005).

Es interés de este trabajo hacer un análisis teórico y experimental de un tipo de circuito RLC, que constituye una de sus variantes más interesantes para la tecnología moderna, llamado oscilador de Van der Pol y es un ejemplo de oscilador no lineal. La modelación de problemas que conducen a oscilaciones no lineales que están fuera de los parámetros normales y se justifica desde el punto de vista teórico por el hecho de que tales circuitos podrían aplicarse en la solución de problemas prácticos o industriales.

## **TITULO**

“ESTUDIO DE LAS OSCILACIONES ELECTROMAGNETICAS EN LOS CIRCUITOS RLC Y ANALISIS TEORICO DEL CIRCUITO DE VAN DER POL”.

## **PROBLEMA**

Encontrar las condiciones bajo las cuales se estabiliza la amplitud de las oscilaciones en el circuito RLC y de Van der Pol.

## **OBJETIVO GENERAL**

Analizar las oscilaciones electromagnéticas en el circuito RLC con y sin fuente de energía externa.

## **OBJETIVOS ESPECÍFICOS**

- Analizar dinámicamente las oscilaciones electromagnéticas en el circuito RLC sin fuente de energía externa.
- Analizar teóricamente las oscilaciones electromagnéticas en el circuito RLC con fuente de energía externa y con impulso no lineal (circuito de Van der Pol).

## **HIPÓTESIS**

Variando los valores de algunos parámetros del circuito se logrará mejorar la estabilidad de las oscilaciones electromagnéticas.

## VARIABLES

**Independiente:** Elementos del circuito (Resistencia, Inductancia, Capacitancia, Fuente de energía, Voltaje y Corriente).

**Dependiente:** La amplitud de la oscilación del voltaje en el circuito.

## MÉTODOS

### Métodos Teóricos

- Modelación matemática y computacional.

### Métodos Empíricos

- Observación
- Experimentación

## CAPITULO I

### FUNDAMENTACION TEÓRICA

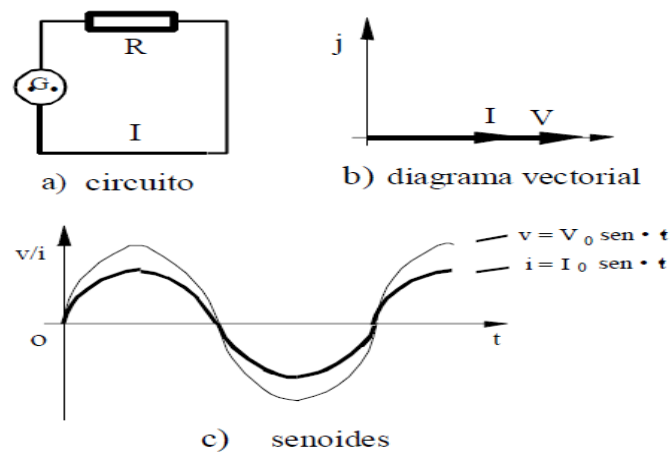
#### 1. 1 CIRCUITOS RLC

El circuito RLC está formado por resistencias (R), condensadores (C) y bobinas (L), cuando se alimentan por una fuente de voltaje alterna senoidal. En corriente alterna aparecen dos nuevos conceptos relacionados con la oposición al paso de la corriente eléctrica. Se trata de la reactancia y la impedancia. Un circuito presentara reactancia si incluye condensadores y bobinas. La naturaleza de la reactancia es diferente a la de la resistencia eléctrica. La impedancia es un concepto totalizador, que incluye la resistencia y las reactancias, es decir, es la suma de ambos (Faleski, 2006).

##### 1.1.1 Circuito con resistencia.

Supongamos un circuito con resistencia óhmica pura a la que se aplica un voltaje alterno senoidal (Figura 1.1.1a). Este voltaje originará en el circuito una corriente senoidal, totalmente en fase con la tensión aplicada y con la misma frecuencia (Figura 1.1.1b).

En la figura 1.1.1 b y c se muestra el diagrama fasorial formado por la tensión y la corriente, donde se observa que ambos están en fase.

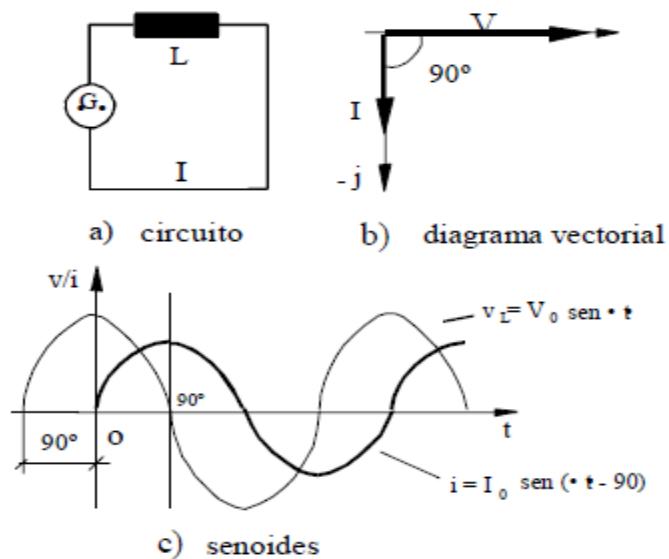


**Figura 1.1.1 Circuito con resistencia.**  $\omega$ : Frecuencia angular,  $\phi$ : fase de la oscilación.

Al alimentar con un voltaje de corriente continua (cc) o con un voltaje alterno senoidal con valor eficaz (valor cuadrático medio) idéntico al cc, la resistencia puramente óhmica manifestará los mismos efectos.

### 1.1.2 Circuito con inductancia pura.

Un circuito con una bobina ideal (sin resistencia) a la que se aplica una tensión alterna senoidal, está tratando de evitar los cambios bruscos de corriente (figura 1.1.2a). La bobina retrasa  $90^\circ$  la corriente respecto al voltaje aplicado en el circuito (figura 1.1.2b y c).



**Figura 1.1.2 Circuito con bobina.**  $\omega$ : Frecuencia angular,  $\phi$ : fase de la oscilación.

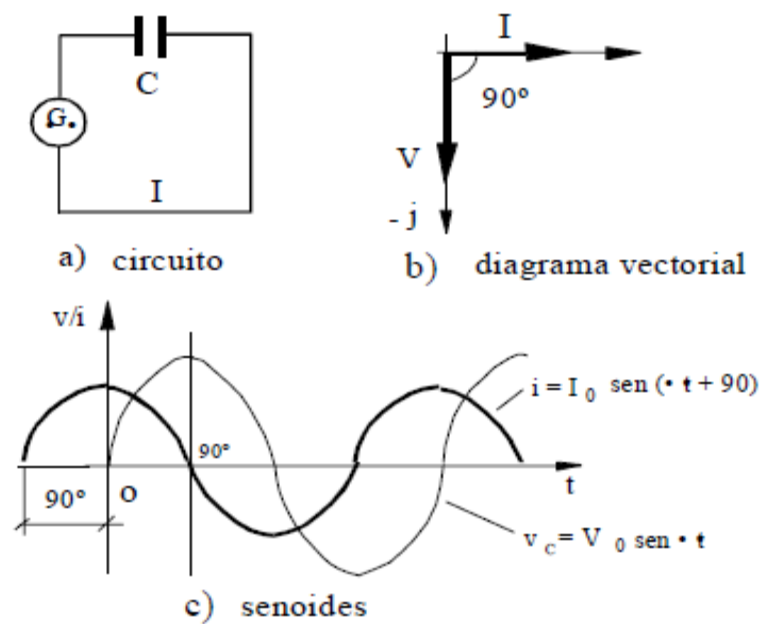
En este circuito, la única resistencia que aparece es la reactancia inductiva, por lo que la corriente eficaz que circula por el circuito será:

$$I = V / X_L (90^\circ) = V / j 2\pi f L = V / -j 2\pi f L = V / -j 2\pi f L = -V / j \omega L$$

La corriente instantánea que circula por el circuito es  $I = I_0 \sin(\omega t - 90^\circ)$ .

### 1.1.3 Circuito con condensador ideal.

Al conectar un condensador ideal (sin resistencia) a una fuente de voltaje alterno (Figura 1.1.3<sup>a</sup> y b), a medida que el voltaje va aumentando, el condensador se va cargando y el voltaje va disminuyendo, el condensador se va descargando. Todo esto ocurre con la misma rapidez con que cambia el sentido del voltaje aplicado. Como consecuencia, se establece en el circuito una corriente alterna de la misma frecuencia que la del voltaje de alimentación.



**Figura 1.1.3. Circuito con capacitor.**  $\omega$ : frecuencia angular,  $\phi$ : fase de la oscilación.

El valor máximo del voltaje tiene lugar al cuarto de periodo ( $90^\circ$ ) de la onda (figura 1.1.3c) y que la carga del capacitor es  $Q$  (c), la capacitancia (microfaradios,  $\mu\text{F}$ ) y voltaje (voltios) en cada armadura del condensador estado por  $Q = C \times V$ , tendremos que al cabo de los  $90^\circ$  la cantidad de carga acumulada será:

$$Q_0 = C \times V_0$$

Por tanto, el valor medio de la intensidad será:

$$I_{\text{med}} = Q_0 / t = CV_0 / T / 4 = 4 C V_0 / T$$

Pero como  $1/T = f$ , tendremos que:

$$I_{\text{med}} = 4 f C V_0$$

Expresando el valor eficaz de la corriente y el voltaje tendremos que:

$$I = V / X_c (90^\circ) = V / (-j) / \omega C = V \omega C / -j = -j V \omega C = j V 2\pi f C$$



$$V = X_C (90^\circ) = (-j) / \omega C = -jI / \omega C = -j I / 2\pi f C$$

La corriente se adelanta  $90^\circ$  con respecto al voltaje, es decir, el voltaje se retrasa  $90^\circ$  con respecto de la corriente. Esto demuestra que los condensadores tienen un comportamiento diferente a las bobinas.

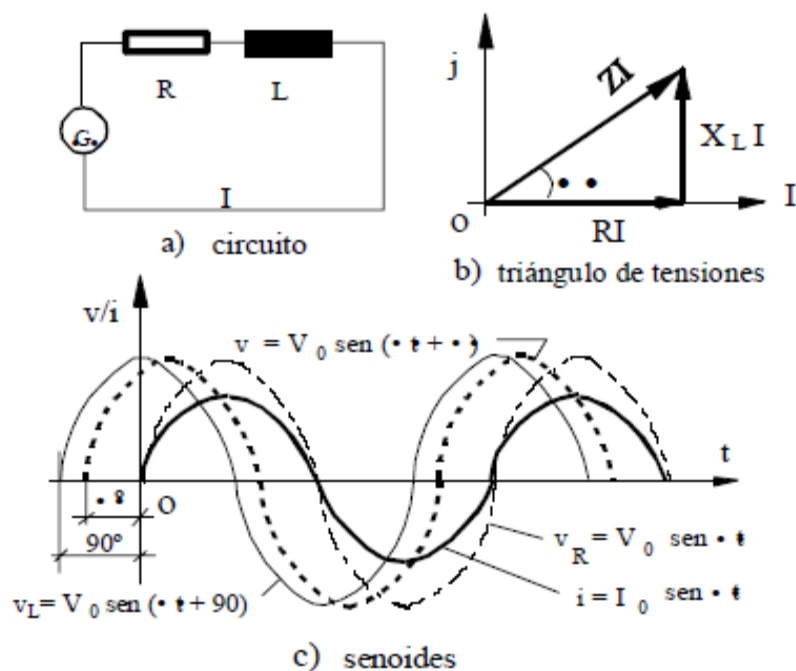
La corriente instantánea circulante en el circuito es  $I = I_0 \text{ sen } (\omega t + 90)$

## 1.2 CIRCUITO RLC EN SERIE

### 1.2.1 Circuito R-L en serie.

Sea el circuito constituido por una resistencia y una bobina ideal (sin resistencia) (Figura 1.2.1 a). Al aplicarle un voltaje alterno senoidal, la corriente circulará por el circuito con la misma la misma frecuencia. Esta corriente dará lugar a dos tipos de caídas de voltajes diferentes en el circuito: una caída de voltaje óhmica debida a la resistencia óhmica,  $R$ , del circuito cuyo valor es  $IR$  y que estará en fase con la corriente y otra inductiva debida a la reactancia de la bobina,  $X_L$ , cuyo valor es  $IX_L$ , que estará desfasada  $90^\circ$  en adelanto respecto a la caída de voltaje óhmica (figura 1.2.1 b y c).

En todo momento, la suma de ambas caídas de voltaje es igual a la tensión aplicada, es decir, es igual a  $ZI$  por la ley de Kirchhoff de las mallas. La corriente y el voltaje no están en fase (figura 1.2.1b).



**Figura 1.2.1. Circuito RL en serie.**  $\omega$ : frecuencia angular,  $\phi$ : fase de la oscilación.

La caída de voltaje tensión en la resistencia esta dado por:

$$\mathbf{V_R} = \mathbf{R_{(0^\circ)} I} \text{ (en fase con la corriente)}$$

Caída de voltaje en la bobina

$$\mathbf{V_L} = \mathbf{X_L_{(90^\circ)} \times I} \text{ (90^\circ en adelante sobre la corriente)}$$

El voltaje total  $\mathbf{V} = \mathbf{Z_{(\phi)} I}$  (en adelante  $\phi$  grados respecto de la corriente),

$$\vec{V}^2 = \vec{V_R}^2 + \vec{V_L}^2$$

que se puede determinar por el triángulo de tensiones (figura 1.2.1b).

### Impedancia en circuito RL

La impedancia del circuito RL tiene la forma:

$$\vec{Z} = \vec{R} + j \vec{X_L}$$

Donde  $R$  es la resistencia óhmica y  $X_L$  es la resistencia o reactancia inductiva y  $j$  es un número imaginario puro ( $j=\sqrt{-1}$ )

El módulo de la impedancia es:

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X_L^2}$$

El argumento o ángulo de desfase es:

$$\phi = \arccos R / Z = \arctan X_L / R$$

El factor de potencia o coseno de  $\phi$  es:  $\cos \phi = R / Z$

La corriente que circula por el circuito vale:  $I = V_{(0^\circ)} / Z_{(\phi)} = I_{(-\phi)}$

$$V = V_o \sin(\omega t + \varphi)$$

$$I = I_o \sin(\omega t)$$

## 1.2.2 Circuito R-C en serie.

Sea el circuito formado por la resistencia pura  $R$  y el condensador  $C$  (figura 1.2.2a). Al aplicar al circuito un voltaje alterno senoidal se generará una corriente alterna senoidal de la misma frecuencia que la de la tensión de alimentación. Esta corriente producirá dos caídas de voltajes diferentes: una  $V_R$ , debida a la resistencia  $R$ , en fase con la corriente cuyo valor es  $RI$  y otra  $V_C$ , de valor  $IX_C$  que se retrasa  $90^\circ$  respecto de la corriente (figura 1.2.2 b y c). En todo momento, la suma fasorial de ambos voltajes debe ser igual a la tensión aplicada.

La caída de voltaje en la resistencia está dada por

$$V_R = R_{(0^\circ)} I \text{ (en fase con la corriente)}$$

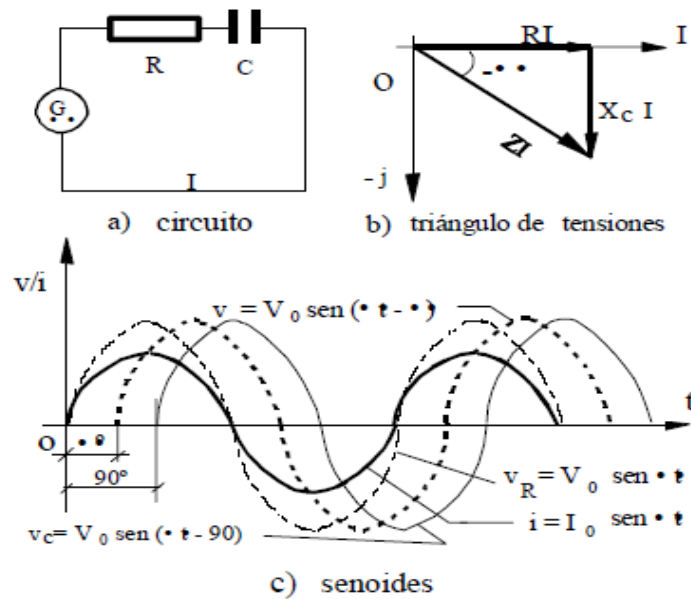
La caída de voltaje en el condensador

$$V_C = X_{C(-90^\circ)} I \text{ (90^\circ en retraso respecto de la corriente)}$$

El voltaje total  $V = I Z(-\phi^\circ)$  en retraso  $\phi$  grados sobre la corriente) está dado por:

$$V^2 = VR^2 + V_C^2$$

conocida como triángulo de tensiones (figura 1.2.2 b).



**Figura 1.2.2. Circuito RC en serie.**  $\omega$ : Frecuencia angular,  $\phi$ : fase de la oscilación.

### La impedancia en circuito RC

La impedancia del circuito RC tiene la forma

$$\vec{Z} = \vec{R} - j\vec{X}_C$$

donde  $R$  es la resistencia óhmica y  $X_C$  es la resistencia o reactancia inductiva y  $j$  es un número imaginario puro ( $j=\sqrt{-1}$ ).

El módulo de la impedancia es:

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X_C^2}$$

El argumento o ángulo de desfase es:

$$\phi = - \arccos R / Z = - \arctan X_C / R$$

El factor de potencia es:

$$\cos \phi = R / Z$$

La corriente por el circuito esta dado por

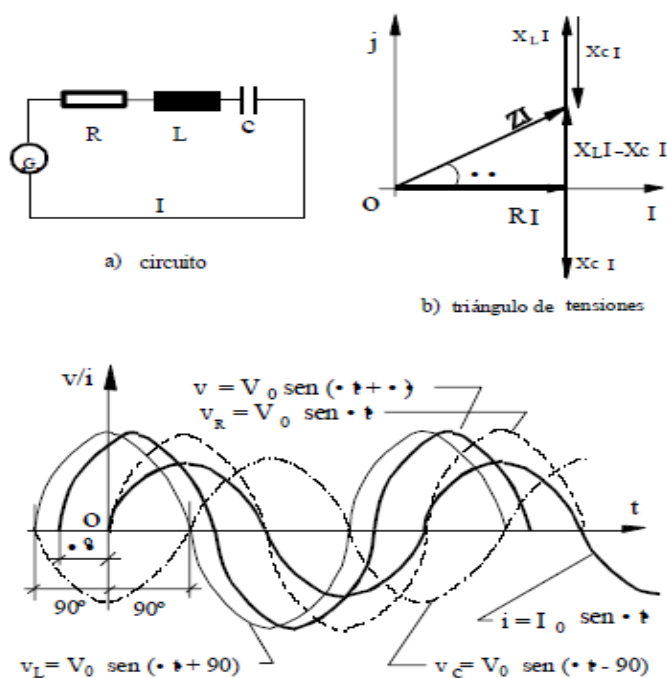
$$I = V_{(0^\circ)} / Z_{(-\phi)} = I_{(\phi)}$$

$$V = V_o \sen (wt - \phi)$$

$$I = I_o \sen (wt)$$

### 1.2.3 Circuito R-L-C en serie

Sea el circuito formado por una resistencia R, una bobina o autoinducción L y un condensador de capacidad C (figura 1.2.3. a).



**Figura 1.2.3. Circuito RLC en serie.**  $\omega$ : Frecuencia angular,  $\phi$ : fase de la oscilación.

Se puede observar la caída de voltaje en la resistencia está en fase con la corriente, pero la caída de voltaje en la bobina esta en adelanto  $90^\circ$  respecto de la corriente. La caída de voltaje en la bobina y en el condensador se encuentra desfasada entre sí  $180^\circ$ , donde el vector resultante de las tensiones reactivas esta dado por  $X_L - X_C$  (figura 1.1.1.6 b).

El vector resultante de la suma de los tres vectores es

$$V_0 = \sqrt{V_R^2 + (V_L - V_C)^2} = I_0 \sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}$$

La impedancia de un circuito RLC en serie

$$\vec{Z} = \vec{R} + j(X_L - X_C)$$

donde R es la resistencia óhmica,  $X_L$  es la resistencia o reactancia inductiva, y  $X_C$  es la reactancia capacitiva y j es un número imaginario puro ( $j = \sqrt{-1}$ ).

El módulo de la impedancia es:

$$|\mathbf{Z}| = \sqrt{\mathbf{R}^2 + (\mathbf{X}_L - \mathbf{X}_C)^2}$$

$$Z = \sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}$$

de modo que se cumpla una relación análoga a la de los circuitos de corriente continua

$$V_0 = I_0 \cdot Z.$$

El ángulo que forma el vector resultante de magnitud  $V_0$  con el vector que representa la intensidad  $I_0$  es:

$$\phi = \arctan \text{ de } (X_L - X_C)/R$$

El factor de potencia es:

$$\cos \phi = R / Z$$

Las expresiones del voltaje y de la corriente eficaz en el circuito están dados por:

$$I = V_{(0^\circ)} / Z_{(\phi^\circ)} = I_{(-\phi)}$$

$$V = V_o \operatorname{sen}(wt)$$

$$I = I_o \operatorname{sen}(wt - \phi)$$

La intensidad de la corriente en el circuito está atrasada un ángulo  $-\phi$  respecto al voltaje de la fuente externa.

### 1.3. CIRCUITO RLC EN PARALELO

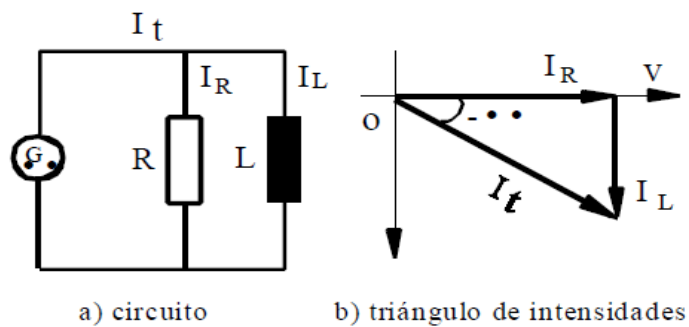
El análisis de los circuitos conectados en paralelo es más complicado que los circuitos conectados en serie. No obstante, al igual que los circuitos serie, estos se resuelven por medio de las impedancias, los circuitos en paralelo se resuelven, generalmente, mediante las admitancias.<sup>1</sup>

#### 1.3.1 Circuito R-L en paralelo

Sea el circuito constituido por una resistencia y una bobina conectados en paralelo (figura 1.3.1a).

---

<sup>1</sup> Cesar Sánchez Norato, *Circuitos Eléctricos, Capítulo VI*  
<http://www.labc.usb.ve/mgimenez/Ec1181ele/Material/Circuitos%2520RLC/Circuitos%2520RLC.pdf>



**Figura1.3.1. Circuito RL en paralelo.**  $\omega$ : Frecuencia angular,  $\phi$ : fase de la oscilación.

Al aplicarle un voltaje alterno senoidal, la resistencia y la bobina estarán sometidos al mismo voltaje, pero la corriente que circula por cada componente será diferente por la resistencia circulará una corriente  $I_R$  que estará en fase con la tensión aplicada y por la bobina circulará una corriente  $I_L$  que estará retrasada  $90^\circ$  respecto al voltaje (figura 1.3.1b).

Aplicando la ley de Kirchhoff para los nodos se obtiene la corriente total que circulará por el circuito, que estará retrasada un ángulo  $\phi$ .

### Admitancia

La admitancia (inverso de la impedancia) está dada por la expresión:

$$\vec{Y} = \vec{Y}_R + \vec{Y}_L = \frac{1}{R} - j \frac{1}{X_L} = G - jB$$

El módulo de la admitancia es:

$$|Y| = \sqrt{G^2 + B^2}$$

El argumento o ángulo  $\phi = \arctan(-B/G)$

Las expresiones del voltaje y de la corriente eficaz en el circuito están dadas por:

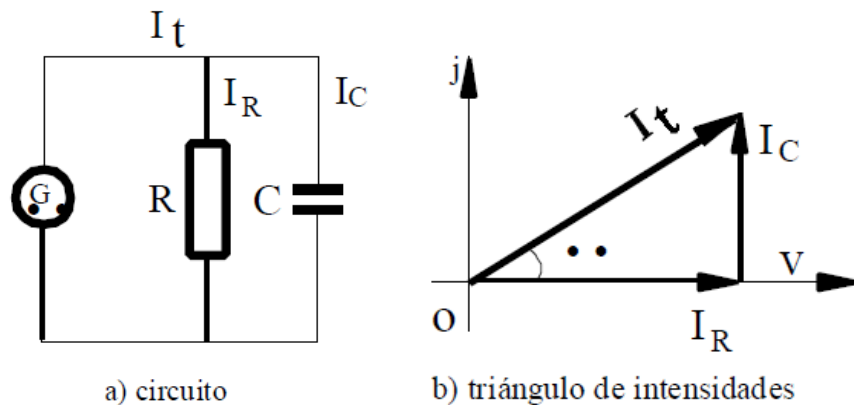
$$V = V_o \sin(\omega t)$$

$$I = I_o \sin(\omega t - \phi)$$



### 1.3.2 Circuito R-C en paralelo.

Sea el circuito formado por la resistencia pura R y el condensador C (figura 1.3.2a).



**Figura 1.3.2 Circuito RC en paralelo.**  $\omega$ : Frecuencia angular,  $\phi$ : fase de la oscilación.

Al aplicar al circuito un voltaje alterno senoidal, la resistencia y el condensador estarán sometidos al mismo voltaje, pero la corriente que circula por cada componente será diferente: por la resistencia circulará una corriente  $I_R$  que estará en fase con la tensión aplicada y por el capacitor circulará una corriente  $I_C$  que estará adelantada  $90^\circ$  con respecto al voltaje (figura 1.3.2b).

Aplicando la ley de Kirchhoff para los nodos, se obtiene la corriente total que circulará por el circuito, que estará retrasada un ángulo  $\phi$ .

#### Admitancia en un circuito RC paralelo

La admitancia (inverso de la impedancia) compleja equivalente tiene la expresión siguiente:

$$\vec{Y} = \vec{Y}_R + \vec{Y}_C = \frac{1}{R} + j \frac{1}{X_C} = G + jB$$

El módulo de la admitancia es:

$$|Y| = \sqrt{G^2 + B^2}$$

El argumento o ángulo  $\varphi = \arctan B/G$

Las expresiones del voltaje y de la corriente eficaz en el circuito esta dado por:

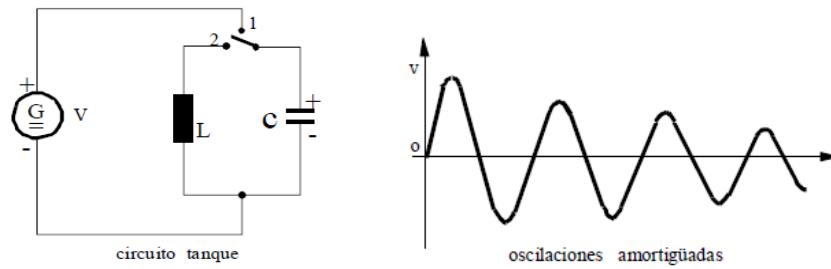
$$V = V_o \sin(\omega t)$$

$$I = I_o \sin(\omega t + \varphi)$$

### 1.3.3 Circuito L-C en paralelo (circuito oscilante o circuito tanque).

En general toda combinación L-C recibe el nombre de circuito oscilante o tanque por su facultad de almacenar energía, especialmente cuando ambas reactancias aparecen solas, sin resistencia ni fuente de alimentación.

Sea el circuito LC, si se coloca el conmutador en la posición 1, el condensador se cargará a la tensión de la fuente (figura 1.3.3). Una vez cargado, al pasarlo a la posición 2, el condensador se descarga a través del inductor, debido a la fem (voltaje) inducido en el inductor, la corriente no puede cambiar de manera instantánea; empieza en cero y finalmente crece hasta llegar a un valor máximo  $I_o$ . Durante este crecimiento, el condensador se está cargando. En cada instante, el potencial del capacitor es igual a la fem inducida, de modo que a medida que el capacitor se descarga, la razón de cambio de la corriente disminuye. Cuando el potencial en el capacitor se hace cero, la fem inducida también es cero y la corriente ha llegado a su valor máximo. Durante la descarga del capacitor, la corriente creciente en el inductor ha producido un campo magnético en el espacio que lo rodea y la energía que estaba almacenada en el campo eléctrico del capacitor ahora está en el campo magnético del inductor.



**Figura 1.3.3. Circuito LC en paralelo.**  $\omega$ : Frecuencia angular,  $\phi$ : fase de la oscilación

Una vez descargado el condensador (y almacenada toda su energía en la bobina), éste comienza de nuevo a cargarse a expensas de la bobina, originándose una corriente en el circuito en sentido contrario al de la descarga. Una vez cedida toda la energía de la bobina al condensador, éste vuelve nuevamente a descargarse sobre la bobina y así sucesivamente.

El resultado es la circulación, por el circuito, de una corriente oscilante o alterna. Si no hubiera pérdidas, sobre todo en la resistencia asociada de la bobina, en el circuito, las oscilaciones mantendrían su amplitud indefinidamente. Pero debido a las pérdidas, dicha corriente se va amortiguando poco a poco hasta desaparecer totalmente. La frecuencia de oscilación responde a la fórmula:

$$f_o = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

Se trata de una frecuencia propia, llamada frecuencia de oscilación.

### Admitancia en un circuito LC paralelo

La admitancia (inversa de la impedancia) compleja equivalente tiene la expresión siguiente:

$$\vec{Y} = \vec{Y}_L + \vec{Y}_C = \frac{1}{X_L} + \frac{1}{X_C} = \vec{G} + j\vec{B}$$

El módulo de la admitancia es:

$$|Y| = \sqrt{G^2 + B^2}$$

El argumento o ángulo  $\phi = \arctan B/G$

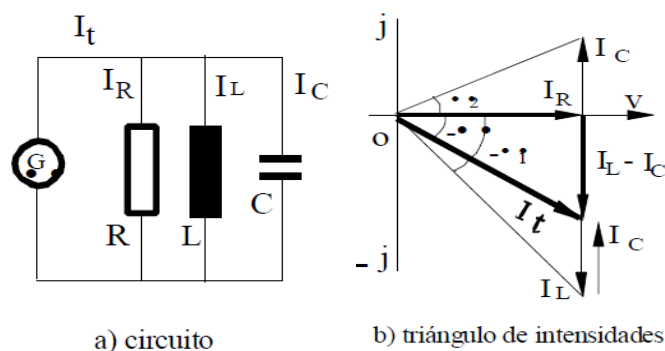
Las expresiones del voltaje y de la corriente eficaz en el circuito esta dado por:

$$V = V_o \sin(\omega t)$$

$$I = I_o \sin(\omega t + \phi)$$

### 1.3.4 Circuito R-L-C en paralelo.

Sea el circuito constituido por una resistencia, una bobina y un condensador conectados en paralelo (de la figura 1.3.4a).



**Figura 1.3.4. Circuito RLC en paralelo.**  $\omega$ : Frecuencia angular,  $\phi$ : fase de la oscilación.

Al aplicarle una tensión alterna senoidal, los tres componentes estarán sometidos a la misma tensión, por lo que la corriente será diferente en cada componente: por la resistencia circulará una corriente  $V/R$  que estará en fase con la tensión aplicada, por el inductor circulará una corriente  $V/X_L$  que estará retrasada  $90^\circ$  respecto de la tensión y por el condensador circulará una corriente  $V/X_C$  que estará  $90^\circ$  en adelante respecto al voltaje tensión (figura 1.3.4b).

Aplicando la ley de Kirchhoff para los nodos, obtendremos la corriente total  $I_t$  que circula por el circuito y que estará retrasada un ángulo  $\phi$ .

### Admitancia

La admitancia total, en forma compleja, es:

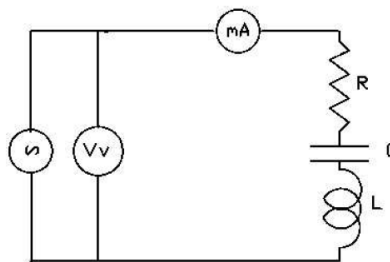
$$\vec{Y_t} = \vec{Y_R} + \vec{Y_L} + \vec{Y_C}$$

El módulo de la admitancia es:

$$|Y| = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C}\right)^2}$$

### 1.4 CARACTERISTICAS DE LOS CIRCUITO RCL EN SERIE

El circuito RCL serie reúne las características de la mayoría de los circuitos de corriente alterna. Dicho circuito está formado por una resistencia, un condensador y una bobina conectados en serie a un generador de corriente alterna, tal como se indica en la figura 1.4.1. Tanto la intensidad de corriente como la diferencia de potencial entre los bornes de sus elementos se comportan de forma oscilatoria, caracterizados por una amplitud y una fase.



**Figura 1.4.1 Circuito RCL serie**

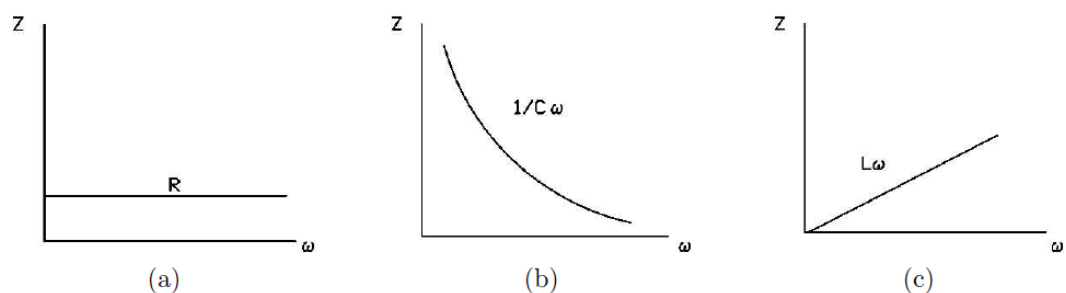
De forma análoga a como sucede con la ley de Ohm para la corriente continua, se puede observar que el voltaje eficaz que suministra el generador es proporcional a la intensidad eficaz de corriente alterna que atraviesa el circuito, siendo la

constante de proporcionalidad la llamada impedancia del circuito. Para este circuito RCL serie la impedancia tiene la forma:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$$

Por tanto, la impedancia de un circuito es función de la pulsación (frecuencia) de la señal alterna aplicada en bornes del circuito. Podemos distinguir los siguientes casos:

- Para una resistencia pura, la impedancia es independiente de  $\omega$ , y por tanto su representación  $Z = Z(\omega)$  será una recta (figura 1.4.2.a).
- Para una capacitor puro, la impedancia varía en función de  $\omega$  de la forma  $1/C\omega$  (figura 1.4.3b)
- Para un inductor puro, la impedancia es proporcional a la pulsación, siendo la constante de proporcionalidad  $L$  (figura 1.4.4c).

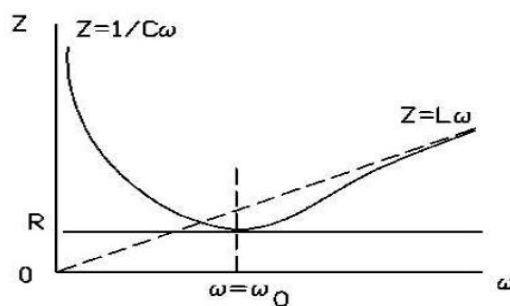


**Figura 1.4.2 Impedancia en función de la frecuencia angular.**

En general, para un circuito RCL serie intervienen las tres componentes de la impedancia, de forma que su representación en función de la pulsación aparece en la figura 1.4.3 Se puede observar que para frecuencias muy pequeñas, la contribución  $L\omega$  no sería importante frente a las contribuciones de  $1/C\omega$  y  $R$ , mientras que para frecuencias grandes, la reactancia capacitiva se puede

despreciar. Además, se puede apreciar que la curva  $Z = Z(\omega)$  tiene un mínimo para  $\omega = \omega_0$ , que cumple  $L\omega_0 = 1/(C\omega_0)$ , para el cual  $Z = R$  y se caracteriza por corresponder al máximo de la amplitud de corriente eficaz. A esta forma de pico de la amplitud de corriente a cierta frecuencia se conoce como resonancia. La frecuencia angular  $\omega_0$  a la cual se presenta el pico de resonancia se conoce como frecuencia angular de resonancia. La agudeza del máximo se mide mediante el factor de calidad  $Q$  del circuito, que tiene la expresión siguiente:

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R}$$



**Figura 1.4.3 Impedancia de un circuito RCL en serie.**

Si se desea disminuir el factor de calidad  $Q$  del circuito para ensanchar el ancho de banda, es suficiente con colocar una resistencia en serie con la bobina. Podríamos variar o controlar el ancho de banda a voluntad. También, se puede modificar el factor de calidad  $Q$ , colocando una resistencia en paralelo con el circuito tanque.

En un circuito de corriente alterna, el voltaje y la corriente no están generalmente en fase. Cuando sobre el circuito RCL serie se aplica un voltaje sinusoidal de la forma  $V = V_0 \sin(\omega t)$ , la corriente que circula es  $I = I_0 \sin(\omega t - \phi)$ , donde  $\phi$  es la diferencia de fase entre el voltaje y la corriente, que depende de  $L$ ,  $R$ ,  $C$  y  $\omega$  de la

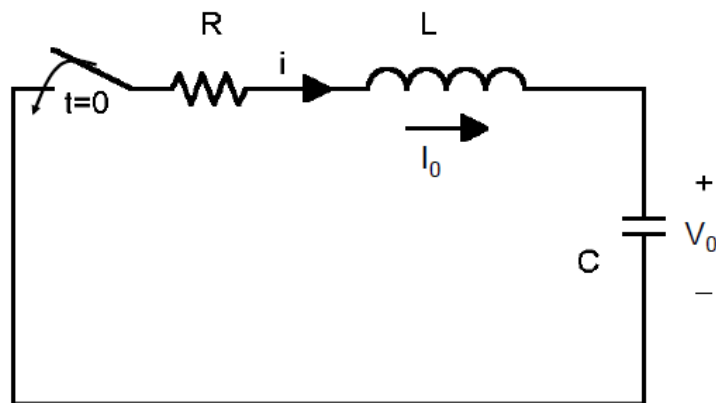
siguiente forma:

$$\phi = \arctan \left( \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} \right)$$

Podemos observar, que en condiciones de resonancia,  $\phi = 0$  y tanto el voltaje como la corriente están en fase.

## 1.5 RESPUESTA DEL CIRCUITO RLC EN SERIE

### 1.5.1 Respuesta natural.<sup>2</sup>



El condensador inicialmente está cargado a un voltaje  $V_0$ . Aplicando la ley de las mallas de Kirchhoff, se puede presentar matemáticamente dicho circuito como:

$$V_R + V_L + V_C = 0$$

Donde  $V_R$  es el voltaje en la resistencia, que es igual  $IR$ ,  $V_L$  es el voltaje en el inductor,  $L \frac{di}{dt}$  mientras que  $V_C$  es el voltaje en el condensador,  $q/C$ , la ecuación del circuito es:

$$iR + \frac{q}{C} + L \frac{di}{dt} = 0$$

<sup>2</sup> R. García Bertrand. "Transitorios en circuitos RLC". Departamento de Ingeniería Eléctrica, Electrónica, Automática y Comunicaciones. Universidad de Castilla –La Mancha.



Donde la carga del capacitor en el instante  $t$  es  $q(t)$  y la intensidad de la corriente  $i$  que circula es  $i(t)=dq/dt$ ; de aquí se obtiene la siguiente ecuación diferencial lineal ordinaria de segundo orden:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = 0$$

Para analizar la respuesta del circuito en función de la frecuencia, se emplea la impedancia equivalente compleja:

$$\bar{Z} = \bar{R} + j(X_L - X_C)$$

donde  $R$  es la resistencia óhmica,  $X_L$  es la resistencia o reactancia inductiva,  $X_C$  es la reactancia capacitiva y  $j$  es un número imaginario puro ( $j = \sqrt{-1}$ ).

El módulo de la impedancia es:

$$|\bar{Z}| = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \qquad Z = \sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}$$

Podemos escribir la expresión de la corriente como:

$$I = \frac{V}{Z(\omega)}$$

La ecuación diferencial puede resolverse proponiendo soluciones del tipo:

$$i(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

Donde las raíces de la ecuación diferencial son:

$$s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = 0$$

$$s_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

$$s_2 = -\frac{R}{2L} - \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

$$\zeta = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} \quad \text{constante de amortiguamiento}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \left[ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right] \quad \text{frecuencia propia o natural}$$

La forma de la solución es diferente para cada uno de los casos; sub amortiguado ( $R$  pequeñas) y sobreamortiguado ( $R$  grande). Cuando  $R^2$  es menor que  $4L/C$ , la solución tiene la forma:

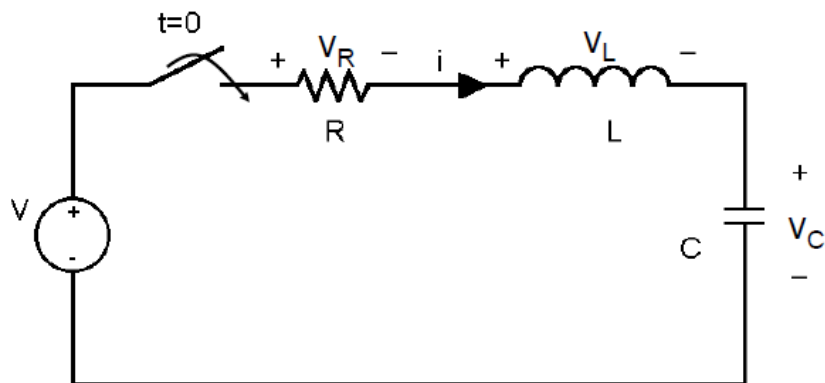
$$q(t) = A e^{-\left(\frac{R}{2L}\right)t} \cos\left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} t + \varphi\right)$$

Donde  $A$  y  $\varphi$  son constantes.

### 1.5.2 Respuesta forzada.<sup>3</sup>

En este caso el circuito está sometido a una fuente de tensión externa periódica  $V(t)$ :

<sup>3</sup> R. García Bertrand. “Transitorios en circuitos RLC”. Departamento de Ingeniería Eléctrica, Electrónica, Automática y Comunicaciones. Universidad de Castilla –La Mancha.



Aplicando la ley de las mallas de Kirchhoff, obtenemos que,

$$Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + V_C = V \sin(\omega t)$$

$$i(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt}, \quad \text{o bien} \quad \frac{di(t)}{dt} = C \frac{d^2v_C(t)}{dt^2}$$

Por tanto:

$$LC \frac{d^2V}{dt^2} + RC \frac{dV}{dt} + V_C = V \sin(\omega t)$$

$$\frac{d^2V}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dV}{dt} + \frac{1}{LC} V = \frac{1}{LC} V \sin(\omega t)$$

La solución de dicha ecuación diferencial tiene la expresión siguiente:

$$V(t) = A e^{-\left(\frac{R}{2L}\right)t} \cos\left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} t + \varphi\right)$$

donde  $A = \sqrt{\frac{V_0}{1 + R^2WC + LCW^2}}$

### 1.5.3 Estudio Energético

- La energía almacenada en el condensador en forma de campo eléctrico es:

$$U_C = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} C V_0^2 \left( 1 - \exp(-\gamma t) \left( \frac{\gamma}{\omega} \sin \omega t + \cos \omega t \right) \right)^2$$

- La energía almacenada en la autoinducción en forma de campo magnético es:

$$U_L = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} \frac{V_0^2}{L \omega^2} \exp(-2\gamma t) \sin^2 \omega t$$

- La energía disipada en la resistencia es:

$$U_R = \int_0^t i^2 R dt = \frac{R V_0^2}{L^2 \omega^2} \int_0^t \exp(-2\gamma t) \sin^2(\omega t) dt = \frac{R V_0^2}{2 L^2 \omega^2} \int_0^t \exp(-2\gamma t) (1 - \cos(2\omega t)) dt =$$

$$\frac{R V_0^2}{4 L^2 \omega^2} \left\{ \frac{1}{\gamma} (1 - \exp(-2\gamma t)) - \frac{1}{\omega^2} (\exp(-2\gamma t) (\omega \sin(2\omega t) - \gamma \cos(2\omega t)) + \gamma) \right\}$$

Al integrar por partes, para llegar a la expresión final se tiene en cuenta que  $\omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$

- La energía suministrada por la batería es:

$$U_V = \int_0^t V_0 i dt = \frac{V_0^2}{L \omega} \int_0^t \exp(-\gamma t) \sin \omega t dt =$$

$$V_0^2 C \left( 1 - \exp(-\gamma t) \left( \cos \omega t + \frac{\gamma}{\omega} \sin \omega t \right) \right)$$

De conformidad al principio de conservación de la energía, se tiene que:

$$U_V = U_C + U_L + U_R$$

Una parte de la energía suministrada por la batería se almacena en el condensador, otra parte en la autoinducción y el resto se disipa en la resistencia.

Después de un tiempo  $t \rightarrow \infty$

- La carga en el condensador tiende a  $CV_0$ , la energía almacenada en el condensador es:

$$U_C = \frac{1}{2} C V_0^2$$

- La intensidad tiende a cero, no hay energía almacenada en la autoinducción:

$$U_L=0$$

- La energía disipada en la resistencia tiende a

$$U_R = \frac{RV_0^2}{4L^2\omega^2} \left\{ \frac{1}{\gamma} - \frac{\gamma}{\omega_0^2} \right\} = \frac{RV_0^2}{4L^2\omega^2} \frac{\omega^2}{\gamma\omega_0^2} = \frac{1}{2} CV_0^2$$

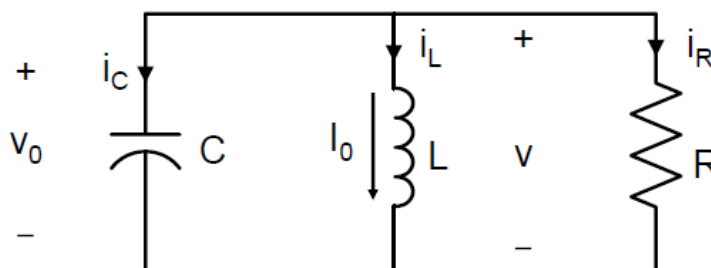
- La energía suministrada por la batería será igual a:

$$U_V = CV_0$$

La mitad de la energía suministrada por la batería se almacena como energía del campo eléctrico en el condensador y la otra mitad se disipa en la resistencia. El mismo resultado obtenido en la carga del condensador sin autoinducción.

## 1.6 RESPUESTA DEL CIRCUITO RLC EN PARALELO

### 1.6.1 Respuesta natural.<sup>4</sup>



Ahora el voltaje es el mismo en cada componente, pero la corriente es diferente, donde  $I_R$  es la corriente que circula por la resistencia, que es igual  $V/R$ ,  $I_L$  es la corriente que circula por el inductor,  $(V_L/X_L)$  mientras que  $I_C$  es la corriente que circula por el condensador,  $V_C/X_C$ . Aplicando la ley de Kirchhoff de los nodos, obtenemos que:

<sup>4</sup> R. García Bertrand. "Transitorios en circuitos RLC". Departamento de Ingeniería Eléctrica, Electrónica, Automática y Comunicaciones. Universidad de Castilla-La Mancha.

$$I_R + I_L + I_C = 0$$

$$\frac{V}{R} + I_L + C \frac{dV}{dt} = 0$$

Donde la carga del capacitor en instante  $t$  es  $q(t)$  y la intensidad de la corriente  $i$  que circula es  $i = dq/dt$ , obtenemos la siguiente ecuación diferencial de segundo orden:

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{L}{RC} \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = 0$$

La ecuación diferencial ordinaria anterior, admite soluciones del tipo:

$$v(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

Las raíces de la ecuación diferencial se extraen de la condición:

$$s^2 + \frac{1}{RC} s + \frac{1}{LC} = 0$$

$$s_1 = -\frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

$$s_2 = -\frac{1}{2RC} - \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

$$s_{1,2} = -\zeta \omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$$

$$\zeta = \frac{1}{2R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad \text{constante de amortiguamiento}$$

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad [\text{rad/s}] \quad \text{pulsación propia o natural}$$

$$v(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

Si  $\zeta > 1$  raíces reales distintas

$\Rightarrow$  circuito sobreamortiguado

Si  $\zeta < 1$  raíces complejas conjugadas

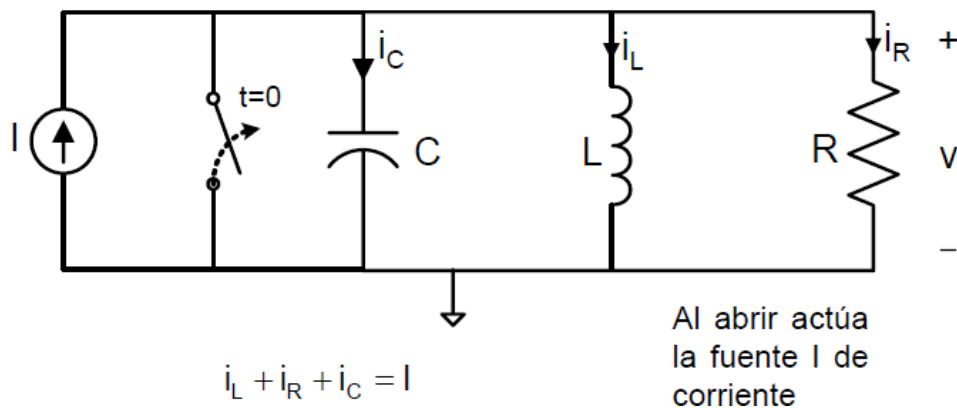
$\Rightarrow$  circuito subamortiguado

Si  $\zeta = 1$  raíces reales iguales

$\Rightarrow$  circuito críticamente amortiguado

$A_1$  y  $A_2$  se obtienen de las condiciones iniciales

### 1.6.2 Respuesta Forzada.<sup>5</sup>



$$i_L + \frac{v(t)}{R} + C \frac{dv(t)}{dt} = I,$$

$$\frac{1}{L} \int_0^t v(y) dy + \frac{v(t)}{R} + C \frac{dv(t)}{dt} = I$$

$$\frac{d^2v(t)}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{dv(t)}{dt} + \frac{1}{LC} v(t) = 0$$

La ecuación diferencial ordinaria anterior, también admite soluciones del tipo:

<sup>5</sup> R. García Bertrand. “Transitorios en circuitos RLC”. Departamento de Ingeniería Eléctrica, Electrónica, Automática y Comunicaciones. Universidad de Castilla –La Mancha.

$$v(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

### 1.7 EL OSCILADOR DE VAN DER POL

El oscilador de Van der Pol es un modelo de sistema dinámico que incluye retroalimentación positiva y un elemento resistivo no lineal. En su aplicación original, a principios del siglo pasado, el oscilador eléctrico con un elemento no lineal se utilizó como precursor de los primeros radios comerciales. Un circuito de este tipo favorece las oscilaciones pequeñas y amortigua las grandes. En este caso se analiza el comportamiento del oscilador de Van der Pol con un voltaje  $x$  y un coeficiente de amortiguamiento  $\varepsilon$ . Para  $\varepsilon = 0$  el sistema es un oscilador lineal no amortiguado. A medida que  $\varepsilon$  crece, lo hace también la no linealidad del sistema. El sistema tiene un solo punto de equilibrio, que es el punto P (0,0), el cual siempre resulta ser inestable (repulsor), pero todas las trayectorias a partir de este punto tienden en espiral a un ciclo límite y a este también tienden a entrar aquellas trayectorias cuyas amplitudes son más grandes que la amplitud del ciclo límite.

Desde el punto de vista histórico, Van der Pol fue precursor de los primeros radios comerciales cuando propuso su modelo en 1920 siendo ingeniero de la Philips Company (Netherlands).

Este oscilador con amortiguamiento no lineal está gobernado por la siguiente ecuación diferencial ordinaria no lineal de segundo orden:

$$x'' - \varepsilon (1 - x^2)x' + x = 0$$

Donde  $x$  es la variable dinámica y el parámetro  $\varepsilon > 0$ , por las características físicas del circuito.



A continuación se llevara a cabo un estudio matemático formal de las características y comportamiento del oscilador de Van der Pol desde el punto de vista de los sistemas dinámicos en función de la variable  $x$ , que representa el voltaje del circuito, y del parámetro de amortiguamiento  $\varepsilon$  que aparecen en la ecuación, con el objeto de encontrar sus condiciones de estabilidad y la posible presencia de ciclos limite en el sistema. Para esto se seguirá una técnica de análisis del sistema de ecuaciones diferenciales que corresponde a la ecuación diferencial original a través de las características de la matriz de coeficientes del sistema y el Teorema de Liénard.<sup>6</sup>

### 1.8 Análisis

Cuando  $x$  es pequeña, el término cuadrático  $x^2$  es despreciable y la ecuación del sistema se convierte en una ecuación diferencial lineal con amortiguamiento negativo  $-\varepsilon$ , es decir:

$$x'' - \varepsilon x' + x = 0$$

El sistema de ecuaciones de primer orden correspondiente a esta ecuación es:

$$x' = y$$

$$y' = \varepsilon y - x$$

Calculo del punto fijo

$$x' = y = 0$$

$$y' = \varepsilon y - x = 0$$

Tenemos que:

<sup>6</sup> Van der Pol. Estabilidad. Ciclo limite. Teorema de Lienard. Sistemas dinámicos.  
El oscilador de Van der Pol /Silvia Larraza Hernández / Víctor José Palencia Gómez

$$y = 0$$

es decir,  $P(x = 0; x' = 0)$

$$x = 0$$

La matriz del sistema lineal es:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \varepsilon \end{bmatrix}$$

Donde:

$$\text{tr } A = \varepsilon$$

$$\det A = 1 > 0$$

De esta manera, como se puede observar en el diagrama de bifurcación traza-determinante [2, 3] (Figura 1.8a), no tendremos puntos Silla y el punto fijo  $P(x = 0, x' = 0)$  es inestable (espirales fuente o inestables cuando  $0 < \varepsilon < 2$  y nodos fuente o inestables cuando  $\varepsilon \geq 2$ ) (Figuras 2 a 5). Por lo tanto, cuando  $x$  es pequeña el sistema es inestable alrededor del punto fijo.



Figura 1.8.1a Diagrama de bifurcación traza-determinante

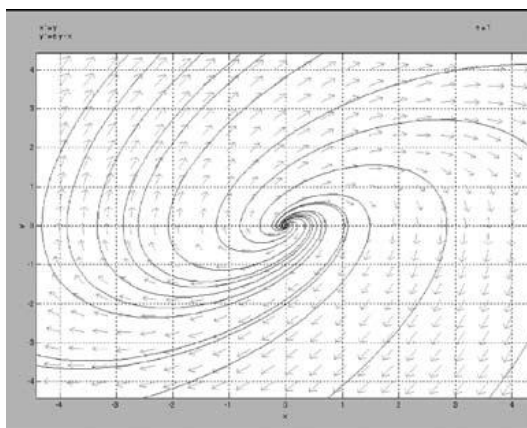
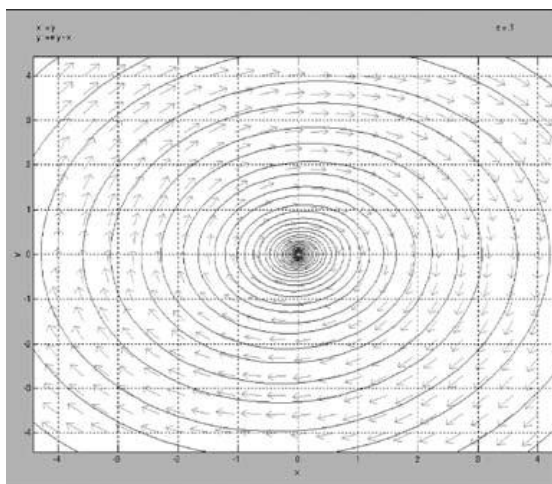
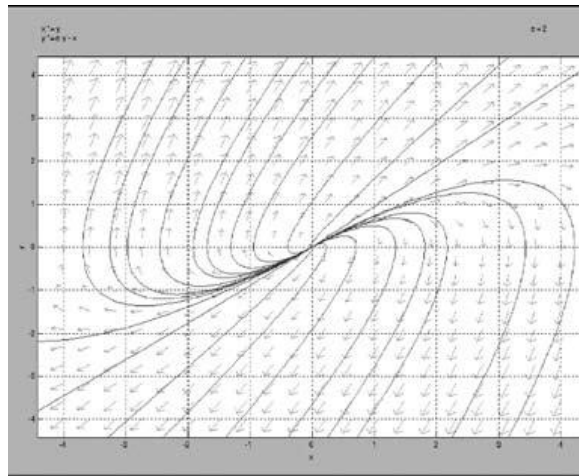
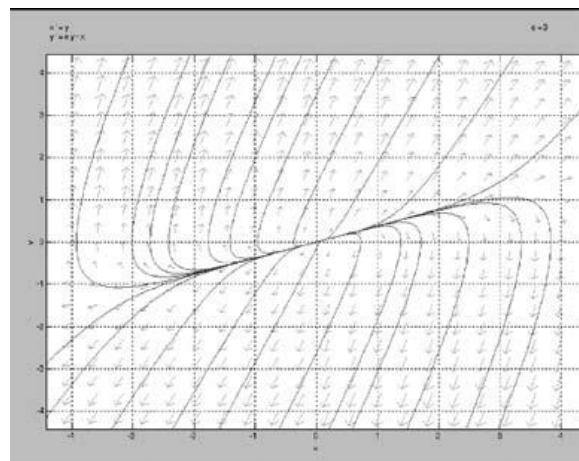


Figura 1.8.2b Diagrama de fase del sistema lineal para  $\varepsilon = 0$

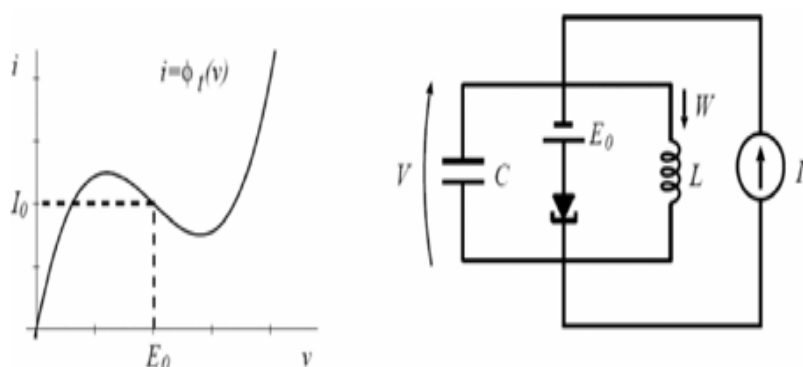


**Figura 1.8.3c Diagrama de fase del sistema lineal para  $\varepsilon = 1$** **Figura 1.8.4d Diagrama de fase del sistema lineal para  $\varepsilon = 2$** **Figura 1.8.5e. Diagrama de fase del sistema lineal para  $\varepsilon = 3$** 

## 1.9 Circuito eléctrico de Van der Pol

Para que un circuito eléctrico pueda ser descrito por la ecuación (1) se requieren elementos eléctricos activos con la propiedad cubica no lineal  $i = \phi(v) = \gamma v^3 - \alpha v$ , donde  $i$  y  $v$  son la corriente y el voltaje respectivamente.

En 1920 Van der Pol construyó el oscilador usando un triodo o tetrodo. Después de que Reona Esaki inventó el diodo túnel en 1957, la fabricación del oscilador de Van der Pol con circuitos eléctricos se hizo más simple. La oscilación se da por un intercambio de energía entre elementos de distinta naturaleza, como son de capacitor a inductor o de inductor a capacitor. El diodo funciona como un elemento activo y ayuda a mantener la oscilación.



**Figura 1.9 Circuito eléctrico con un diodo túnel para el oscilador de Van der Pol.**

Del circuito:

$$I_o = i_c + i_D + i_L$$

Donde

$I_o$  = Corriente que proporciona energía al sistema

$i_c$  = Corriente en el capacitor  $i_c = CV_c'$

$i_D$  = Corriente del diodo  $i_D = \gamma v^3 - \alpha v$

$i_L$  = corriente en el inductor

Ecuación de Van der Pol

$$x'' - \epsilon (1 - x^2) x' + x = 0$$

## **CAPITULO II**

### **2.1 MATERIALES Y METODOS**

Los Circuitos RLC en serie y paralelo son particularmente convenientes para el uso de un software específico (la interface HPCI-1), la cual nos permite capturar los datos en un ordenador y realizar un tratamiento gráfico de la familia de curvas (oscilaciones) correspondientes a cada solución particular, para poder hacer un análisis e interpretación geométrica de la situación problemática, pues de otra forma no es posible en un tiempo razonable.

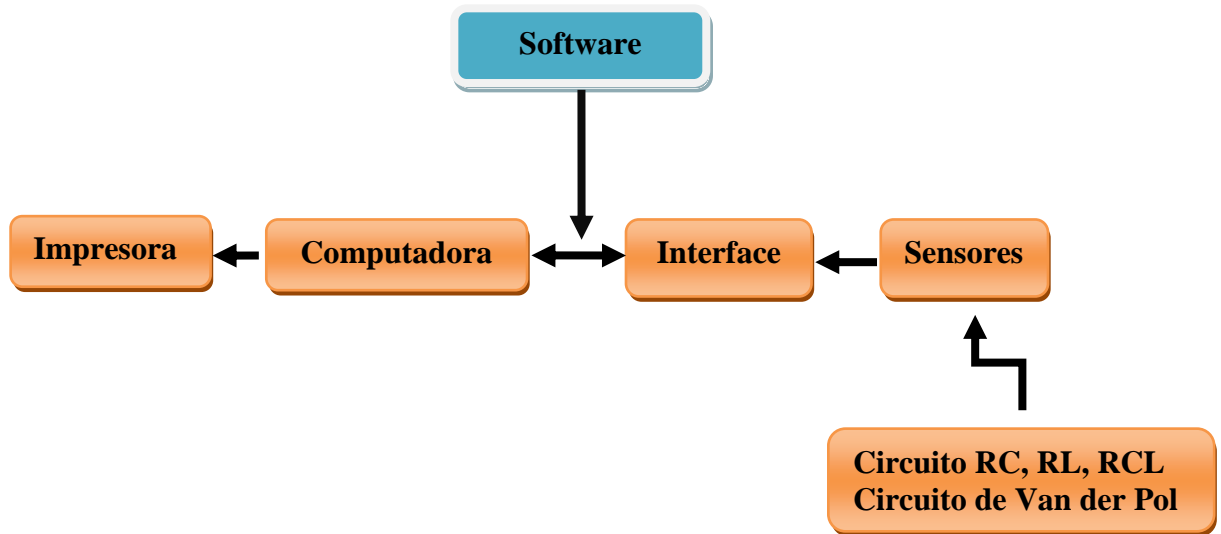
#### **2.1.1 Método Experimental.**

El trabajo experimental se desarrollo en el laboratorio de Física II de la Universidad de Granma utilizando tecnología informática, esta consistió en conectar el circuito RLC a la interface HPCI-1 (Versión 4.0) y sus correspondientes sensores de corriente y de voltaje.

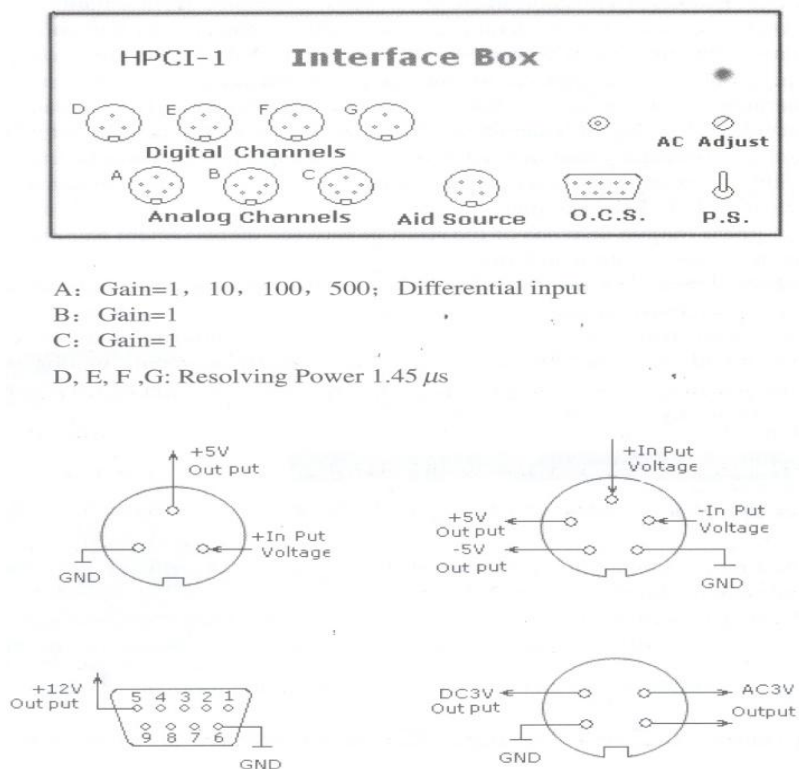
La interface HPCI-1 opera con 220v corriente alterna a 50 Hz de frecuencia, posee 4 canales que pueden trabajar al mismo tiempo a una potencia máxima de 30 Watts. El sistema posee 4 sensores de voltaje con los cuales se puede estudiar las oscilaciones electromagnéticas en general y en particular en el presente trabajo se emplearon los sensores de tensión D y E, todos los resultados tanto numéricos como gráficos se registran en la pantalla del ordenador.

#### **2.1.2 Componentes del Sistema y Parámetros Técnicos**

La siguiente figura muestra el esquema de conexión de los elementos utilizados.



### 2.1.3 Interface HPCI-1



Elaborado por los Postulantes

Fuente: Application Manual Computer Aided Physics Laboratory (HPCI-1)



Elaborado por los Postulantes

Fuente: Laboratorio de Física II, Universidad de Granma

#### 2.1.4 Sensores e Instrumentos Experimentales.

- **Sensor de Voltaje y de Corriente**

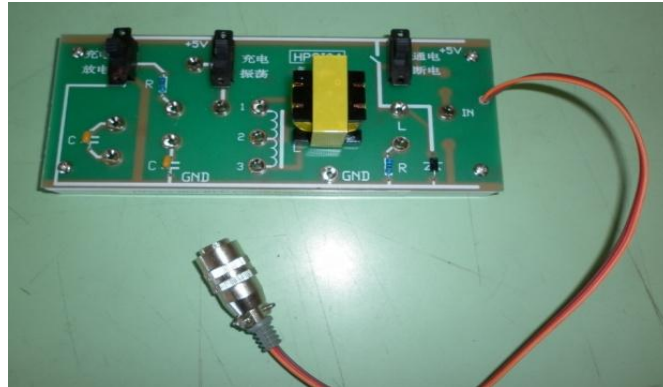


Elaborado por los Postulantes

Fuente: Laboratorio de Física II, Universidad de Granma

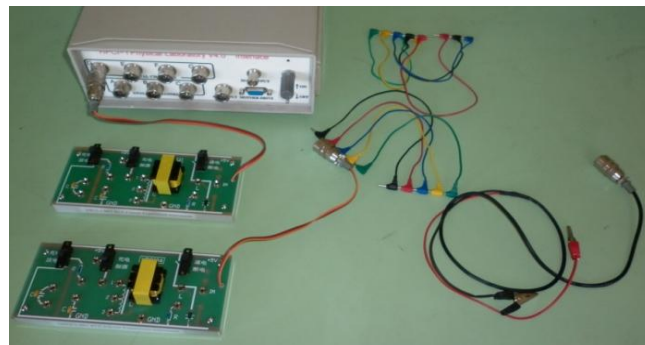
- **Circuito RLC**





Elaborado por los Postulantes

Fuente: Laboratorio de Física II, Universidad de Granma



Elaborado por los Postulantes

Fuente: Laboratorio de Física II, Universidad de Granma

### 2.1.5 Métodos Teóricos

En el análisis teórico se considero resolver matemáticamente la ecuación de Van der Pol para la amplitud de las oscilaciones. Esto significó resolver analíticamente dos ecuaciones diferenciales ordinarias: Una no lineal y otra lineal. Esto permitió llegar a dos modelos teóricos para describir las oscilaciones lineales y no lineales del oscilador de Van der Pol.

Ambas soluciones se graficaron utilizando software informáticos y una escala temporal arbitraria.

## **2.1.6 Manejo de Datos**

Todos los datos y la información gráfica fueron almacenados y capturados directamente en la pantalla del ordenador. Los cálculos y representación gráfica de la amplitud de las oscilaciones en el oscilador de Van der Pol fueron realizados utilizando el paquete estadístico STATISTICA (Stat. Soft. Inc., 2003, versión 6.0).

### CAPITULO III

#### 3.1 ANALISIS Y DISCUSION DE LOS RESULTADOS

##### 3.1.1 Análisis del circuito LC.

En la figura 3.1.1b se representa la respuesta del circuito LC. En este circuito oscilante la energía del campo eléctrico (a través de la descarga del condensador) es constantemente convertida en energía del campo magnético (almacenada en la bobina inductora).

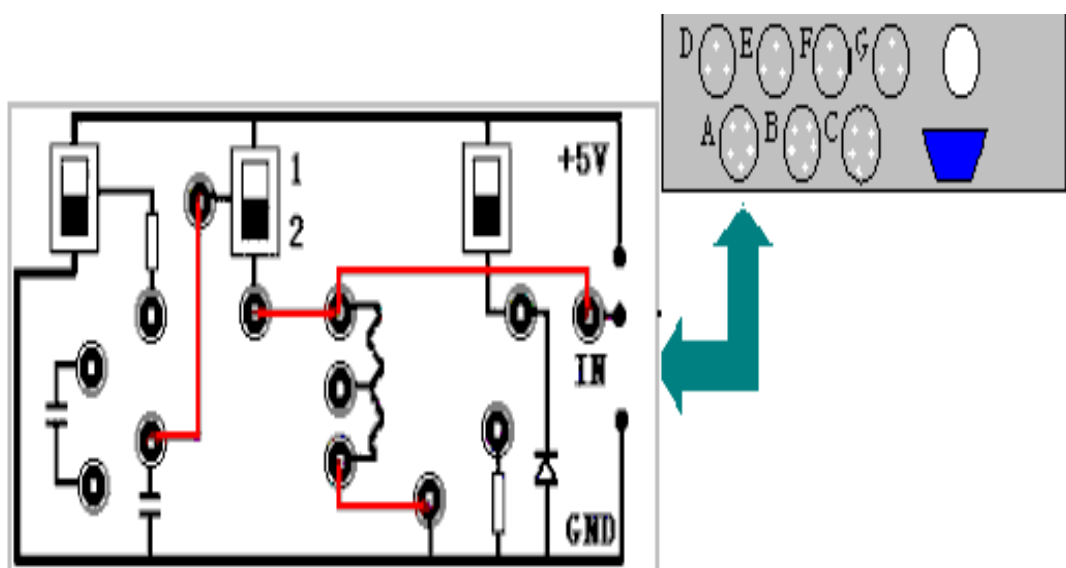
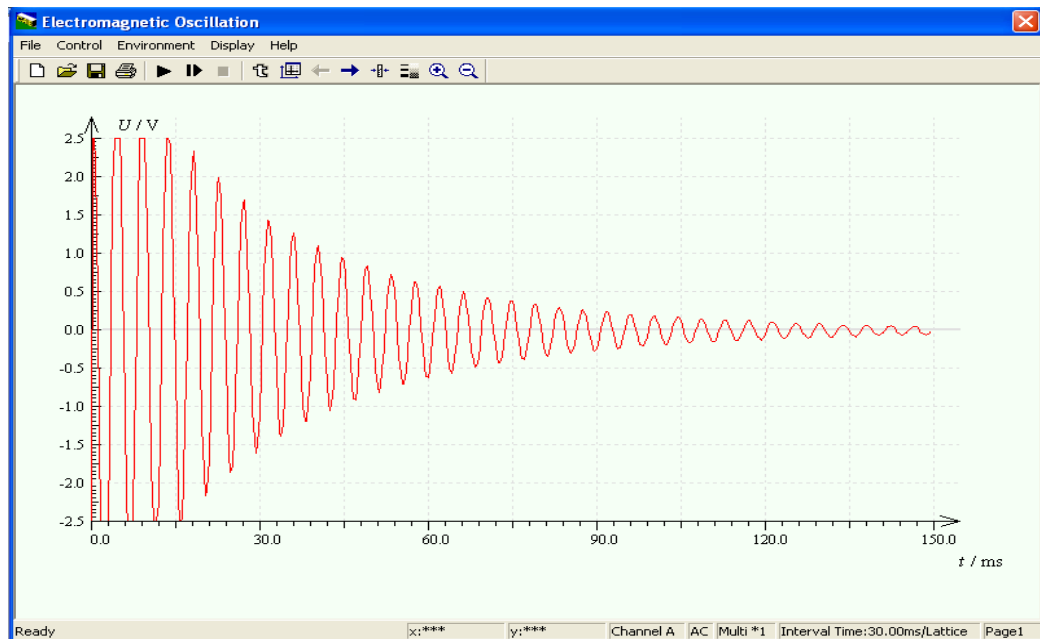
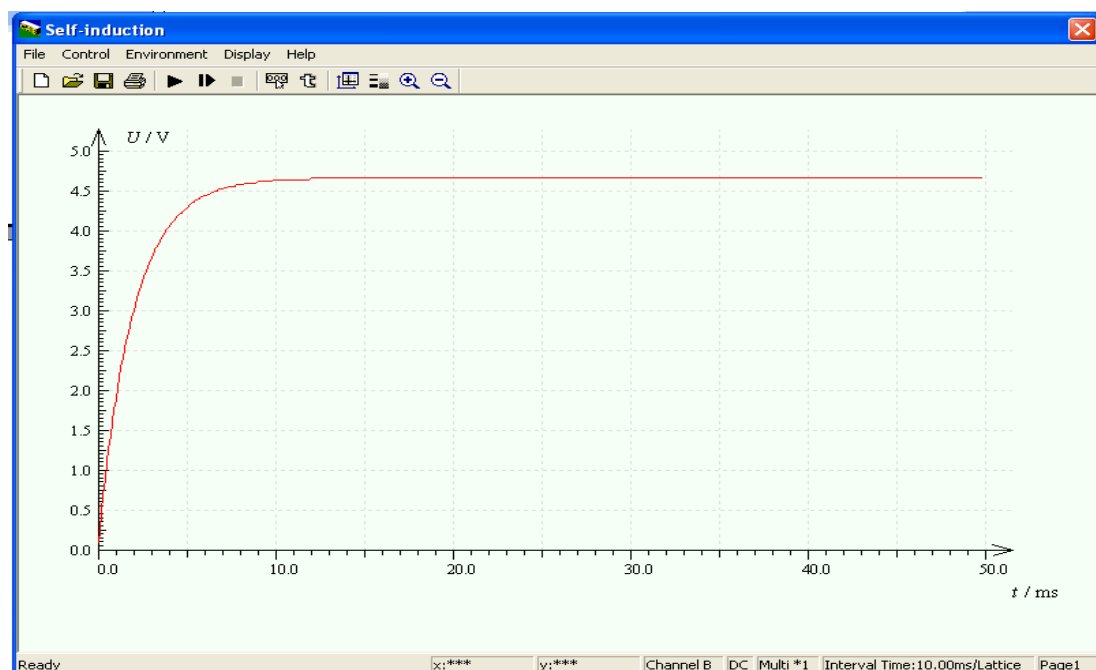


Figura 3.1.1a Diagrama del circuito

**Figura 3.1.1b**

### 3.1.2 Curva de inducción de la bobina (RL)

**Figura 3.1.2**

### 3.1.3 Señales del circuito en corriente alterna

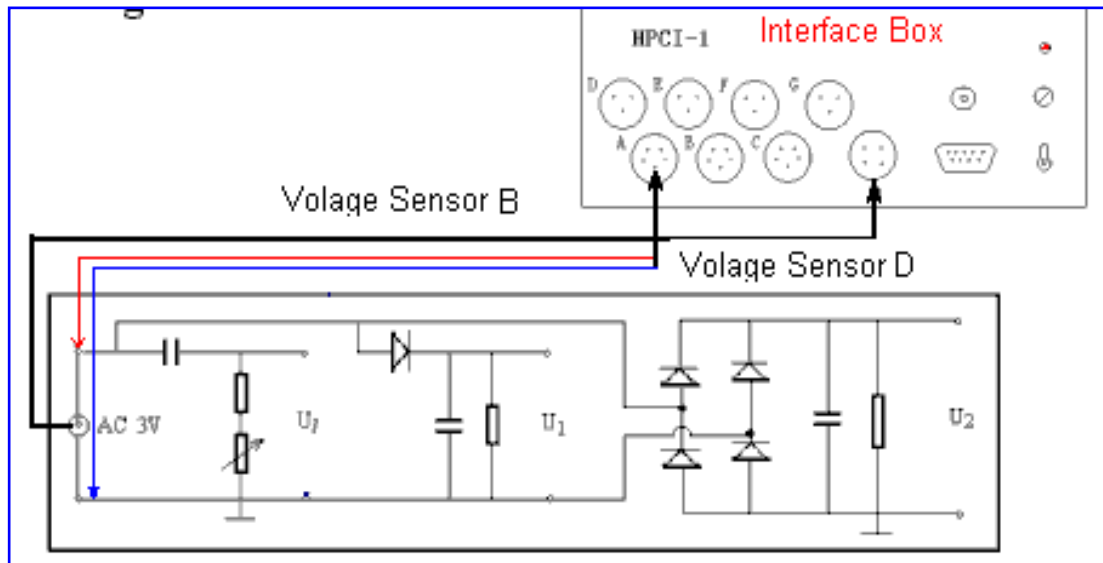


Figura 3.1.3a Diagrama del circuito

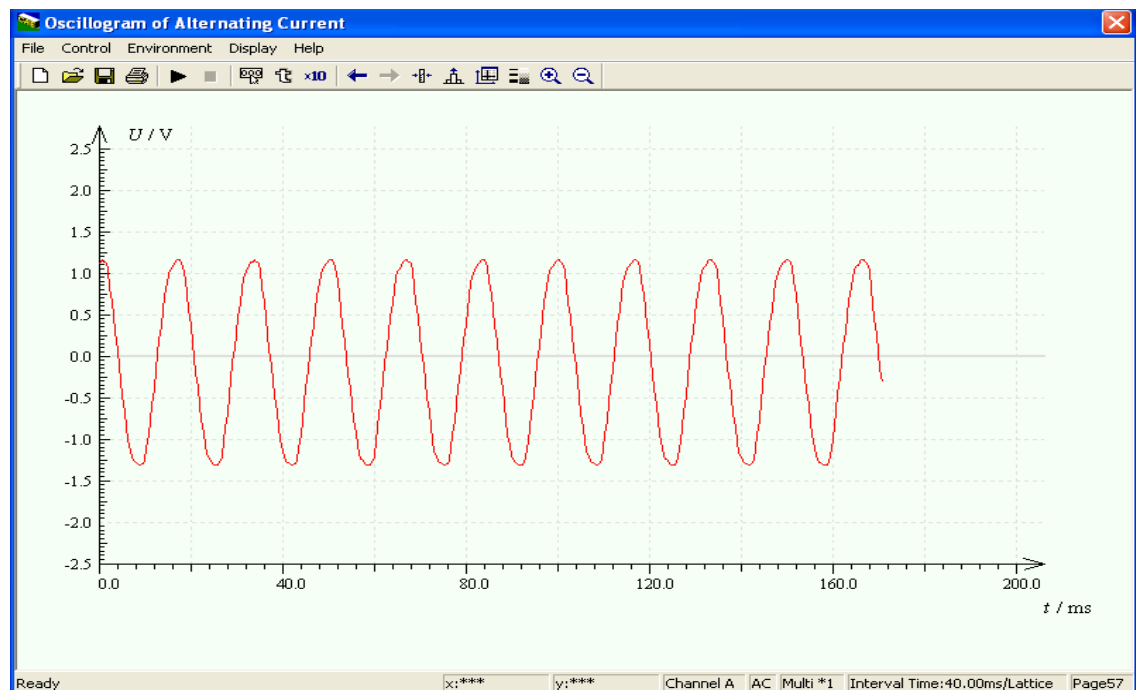


Figura 3.1.3b Oscilación alterna

### 3.1.4 Circuito RLC

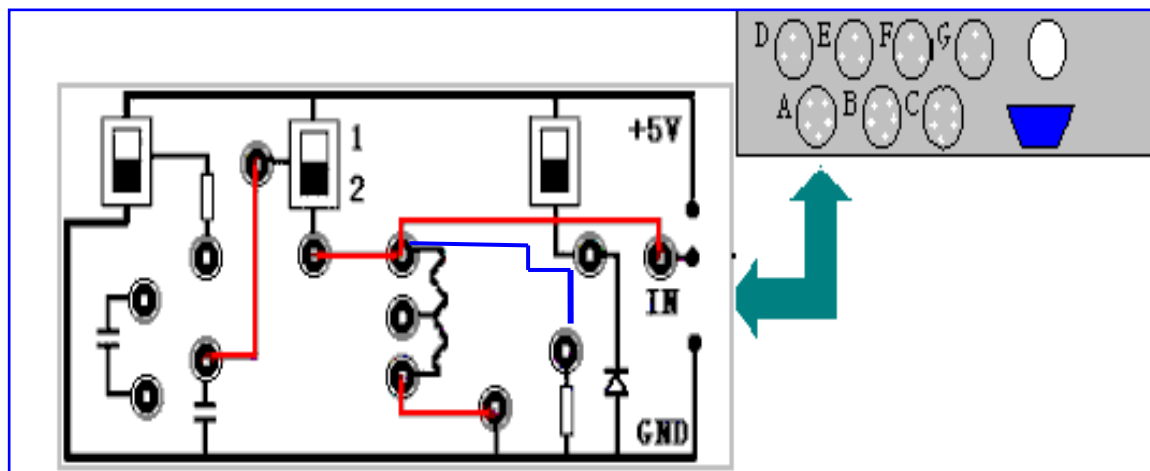


Figura 3.1.4a Diagrama del circuito

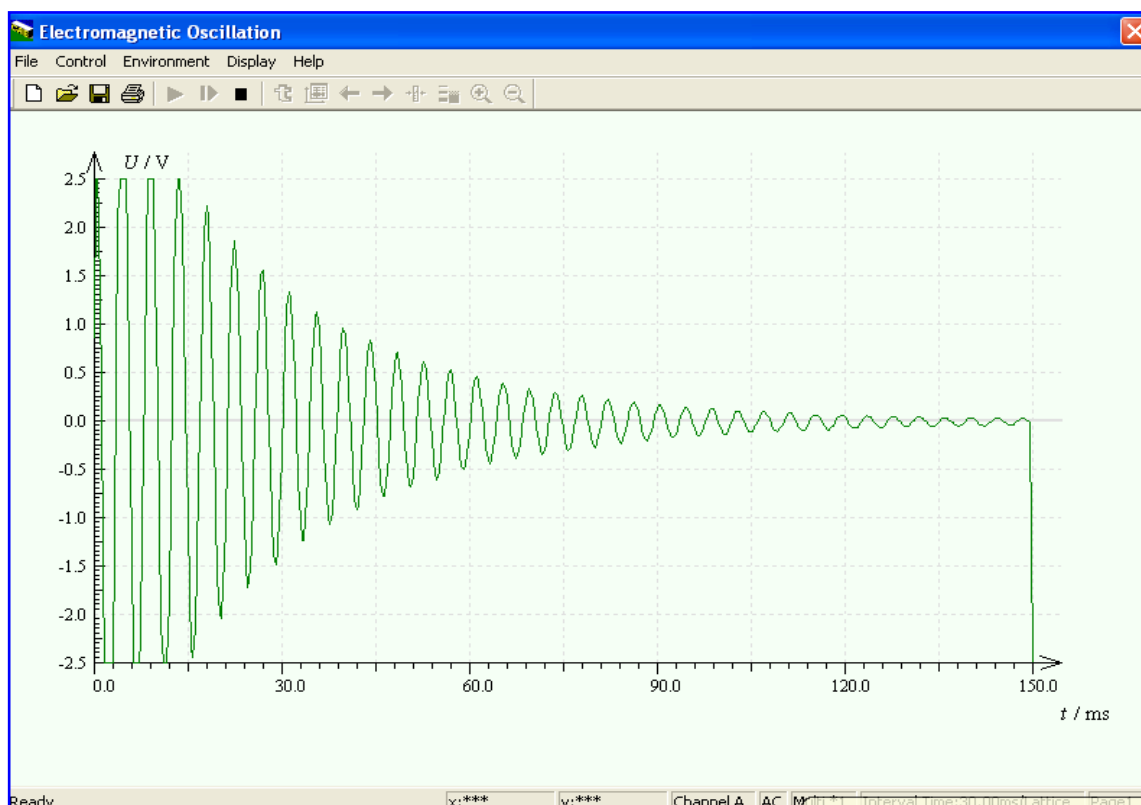


Figura 3.1.4b Oscilación

### 3.1.5 Análisis teórico del circuito de Van der Pol

El circuito de Van der Pol como modelo de oscilador electromagnético no lineal.

#### Resultados

El circuito de Van der Pol es una configuración RLC modificado a partir de un circuito que presenta oscilaciones amortiguadas. En este caso el, o los elementos resistivos están formados por resistencias no lineales (válvulas) y resistencias lineales convencionales. Así, la corriente ( $i$ ) y la tensión ( $v$ ) están relacionadas por:

$$i_1 = -\alpha v + \delta v^3 \text{ Para la resistencia no lineal}$$

$$i_2 = \frac{v}{R} \text{ Para la resistencia no lineal convencional.}$$

En el primer caso  $\alpha$  y  $\delta$  son parámetros propios de la válvula electrónica, mientras  $R$  es la resistencia óhmica.

La ecuación diferencial que rige estas oscilaciones se puede plantear, en forma adimensional, como:

$$\frac{d^2 v}{d\varepsilon^2} + \varepsilon(1 - v^2) \frac{dv}{d\varepsilon} + v = 0 \quad (1)$$

$$\text{Donde: } \varepsilon = \omega_0 t, \varepsilon = \sqrt{\frac{1}{C(\alpha + \frac{1}{R})}}, \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

$$\mathbf{V} = \frac{3\delta v}{\alpha} + \frac{1}{R}, \text{ termino adimensional.}$$

Es decir, la ecuación (1) incluye un pulso cuadrático de la tensión como ruido externo en la amplitud de la tensión.

$$\text{Se } \boldsymbol{\varepsilon} \gg \omega_0$$

Hagamos  $\mathbf{Z} = \frac{dv}{d\tau}$ : en la ecuación (1), entonces tenemos:

$$\mathbf{Z} = \frac{dv}{d\tau} = -\boldsymbol{\varepsilon}(1 - v^2)\mathbf{Z} - \mathbf{V} \quad (2)$$

Como nos interesa investigar el carácter de la amplitud de las oscilaciones de la tensión, consideremos que:

$$\mathbf{v}(\boldsymbol{\tau}) = \mathbf{A}(\boldsymbol{\tau})\cos\boldsymbol{\tau} \quad (3)$$

Es decir, la amplitud de las oscilaciones se considera que son diferentes del tiempo adimensional  $\boldsymbol{\tau}$ .

Si la amplitud de las oscilaciones varía lentamente con el tiempo, entonces la segunda derivada de la amplitud se puede despreciar.

Transformemos el término no lineal en (1) y pongámoslo como:

$$\boldsymbol{\varepsilon} \frac{dv}{d\tau} (1 - v^2) = \boldsymbol{\varepsilon} \frac{d}{d\tau} \left( v - \frac{v^3}{3} \right)$$



$$= \varepsilon \frac{d}{d\tau} A \cos \tau - \frac{A^3}{3} \cos^3 \tau, \text{ pero:}$$

$$\cos^3 \tau = \frac{1}{4} (3 \cos \tau - \cos 3\tau), \text{ luego:}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{d}{d\tau} (A \cos \tau - \frac{A^3}{3} \cos^3 \tau) \\ = \varepsilon \frac{d}{d\tau} (A - \frac{A^3}{4}) \cos \tau - \frac{A^3}{12} \cos 3\tau \end{aligned}$$

Por otro lado:

$$\frac{d^3 v}{d\tau^3} =$$

$$\frac{d^2 A}{d\tau^2} \cos \tau - \frac{dA}{d\tau} \sin \tau - \frac{dA}{d\tau} \sin \tau - A \cos \tau$$

$$= -2 \frac{dA}{d\tau} \sin \tau - A \cos \tau$$

Poniendo estos resultados en (3)

$$= -2 \frac{dA}{d\tau} \sin \tau - A \cos \tau$$

$$= -\varepsilon \frac{d}{d\tau} \left( A - \frac{A^3}{4} \right) \cos \tau - \frac{A^3}{12} \cos 3\tau - A \cos \tau$$

Si se iguala los términos en las funciones linealmente independientes se llega a la expresión:

$$-2 \frac{dA}{d\tau} \sin \tau = \varepsilon \left( A - \frac{A^3}{4} \right) \sin \tau$$

$$\frac{dA}{d\tau} = \frac{\varepsilon}{2} \left( A - \frac{A^3}{4} \right) \quad (4)$$

Y esta sería la ecuación diferencial cuya solución determina el carácter de la amplitud de las oscilaciones.

La ecuación (4) se puede resolver como una ecuación de Bernoulli sin necesidad de reducirla a lineal.

$$\frac{dA}{d\tau} + \frac{1}{2} \varepsilon A = \frac{1}{8} \varepsilon A^3$$

Hagamos  $A = X(\tau) Y(\tau)$

$$\frac{dA}{d\tau} = A' = \frac{dx}{d\tau} \cdot y + x \frac{dy}{d\tau}$$

$$\frac{dx}{d\tau} \cdot y + x \frac{dy}{d\tau} + \frac{1}{2} \varepsilon (xy) = \frac{1}{8} \varepsilon x^3 y^3$$

ó

$$x'y + xy' + \frac{1}{2} \epsilon xy = \frac{1}{8} \epsilon x^3 y^3$$

$$x'y + x \left( y' + \frac{1}{2} \epsilon y \right) = \frac{1}{8} \epsilon x^3 y^3$$

Hallamos  $y(\tau)$  como:

$$\frac{dy}{d\tau} + \frac{1}{2} \epsilon y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{1}{2} \epsilon d\tau$$

$$\ln y = -\frac{1}{2} \epsilon \tau \Rightarrow y = e^{-\frac{1}{2} \epsilon \tau}$$

$$\text{Luego} = e^{-\frac{1}{2} \epsilon \tau} \frac{dx}{d\tau} = \frac{1}{8} \epsilon x^3 e^{-\frac{3}{2} \epsilon \tau}$$

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{1}{8} \epsilon x^{3-\epsilon} \tau e \Rightarrow \frac{dx}{x^3} = \frac{1}{8} \epsilon e^{-\epsilon \tau} d\tau$$

$$\int x^{-3} dx = \frac{1}{8} \epsilon \int e^{-\epsilon \tau} d\tau$$

$$-\frac{1}{2x^2} = -\frac{1}{8} e^{-\varepsilon\tau}$$

$$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{4} e^{-\varepsilon\tau} \Rightarrow x^2 = 4e^{\varepsilon\tau}$$

$$x = 2 [e^{\varepsilon\tau}]^{1/2} + c$$

$$A = \left[ 2e^{\frac{1}{2}\varepsilon\tau} + 2c \right] e^{-\frac{1}{2}\varepsilon\tau} = \left[ 2 + 2ce^{-\frac{1}{2}\varepsilon\tau} \right]$$

$$A = 2 (1 + ce^{-\frac{1}{2}\varepsilon\tau}) \text{ haciendo } C = 1$$

$$A = 2 (1 + e^{-\frac{1}{2}\varepsilon\tau}) \quad (5)$$

La relevancia de este circuito es que el término no lineal provoca que aun para

tiempos muy grandes el sistema oscile con amplitud adimensional,  $A(\tau) =$

2, es decir:

Cuando  $\tau \rightarrow \infty \Rightarrow A(\infty) = 2$

Si se desprecia el término cubico en la expresión para la corriente a través de la válvula, tendríamos:

$$\frac{dA}{d\tau} = -\frac{1}{2}\epsilon A, \text{ luego:}$$

$$\frac{dA}{A} = -\frac{1}{2}\epsilon d\tau \Rightarrow \ln A = -\frac{1}{2}\epsilon \tau$$

$$A = C e^{-\frac{1}{2}\epsilon \tau}$$

Es decir,  $A \rightarrow 0$  cuando  $\tau \rightarrow \infty$

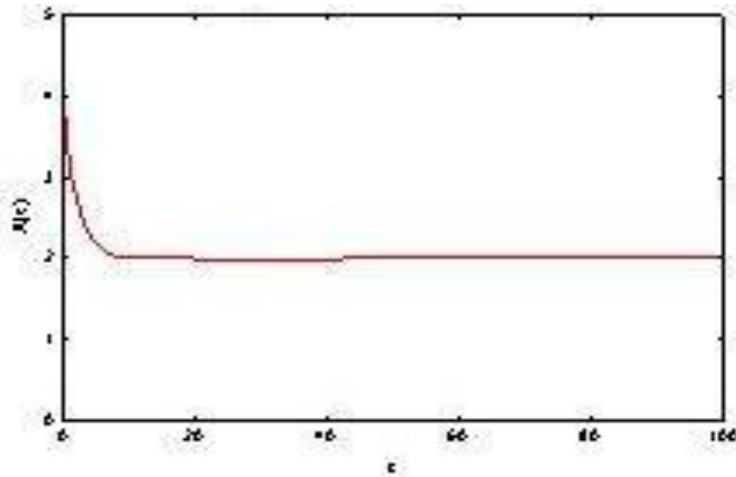
En el caso de la ecuación (5) es útil considerar que el régimen no lineal oscilatorio está condicionado por la inductancia L: es decir:

$$A = 2 \left[ 1 + e^{-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{L}{c(\alpha+1/R)}} \cdot \sqrt{\frac{1}{Lc}} t} \right]$$

$$A = 2 \left[ 1 + e^{\left(-\frac{1}{2c} \sqrt{\frac{1}{\alpha+1/R}}\right) t} \right]$$

Pero:  $\alpha = S \left( D - \frac{M}{L} \right)$

Donde  $S$  es la pendiente de la válvula,  $D$  su conductividad interna y  $M$  la inductancia mutua.



**Figura 3.1.5a** El oscilador de Van der Pol

Resultados del experimento numérico utilizando valores de tiempo adimensional  $\tau=1, 2, 3, 4, 5, 10, 100$ .

El oscilador de Van der Pol estabiliza su amplitud en  $A=2$  mientras que la amplitud en el circuito RLC sin perturbación no lineal tiende a  $A=0$  para grandes tiempos. De tal forma, el régimen oscilatorio para cada circuito puede ser visualizado en las siguientes figuras.

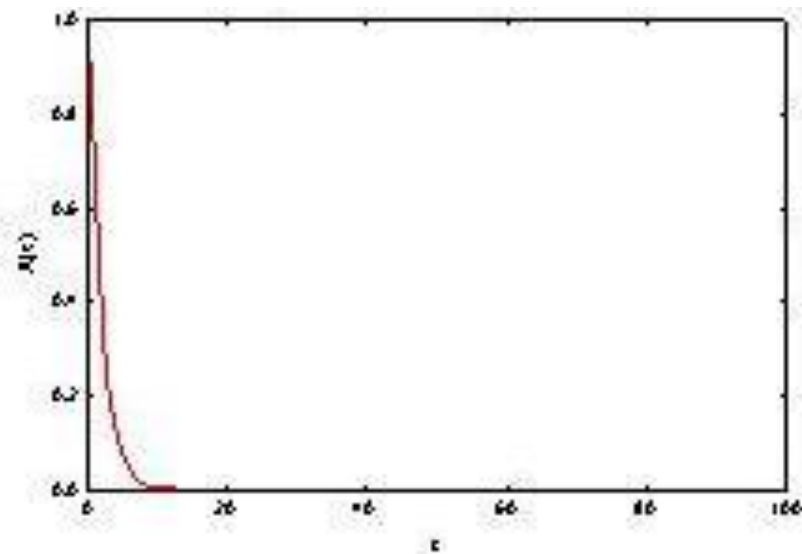


Figura 3.1.5b Circuito RLC amortiguado

$$V(\tau) = e^{-0.5\tau} \cos \tau$$

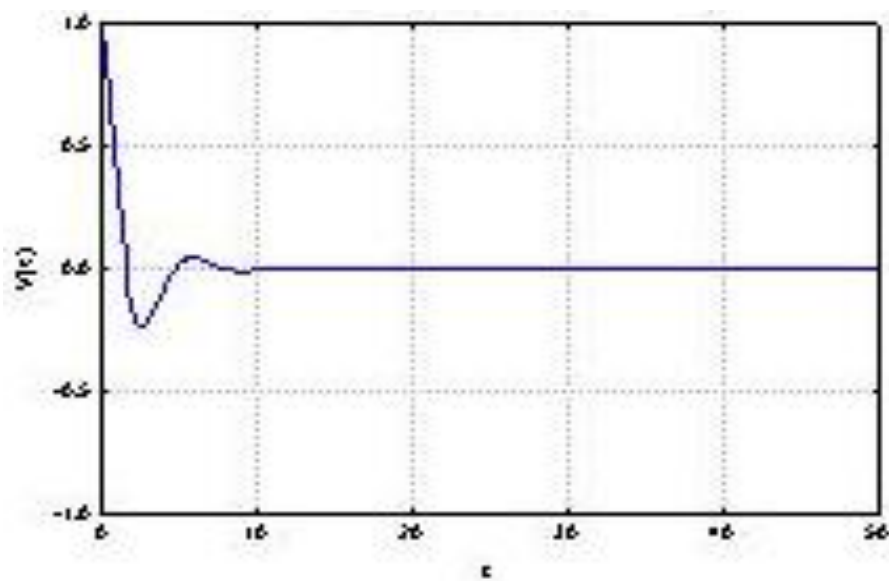


Figura 3.1.5c

$$V(\tau) = 2[1 + e^{-0.5\tau}] \cos \tau$$

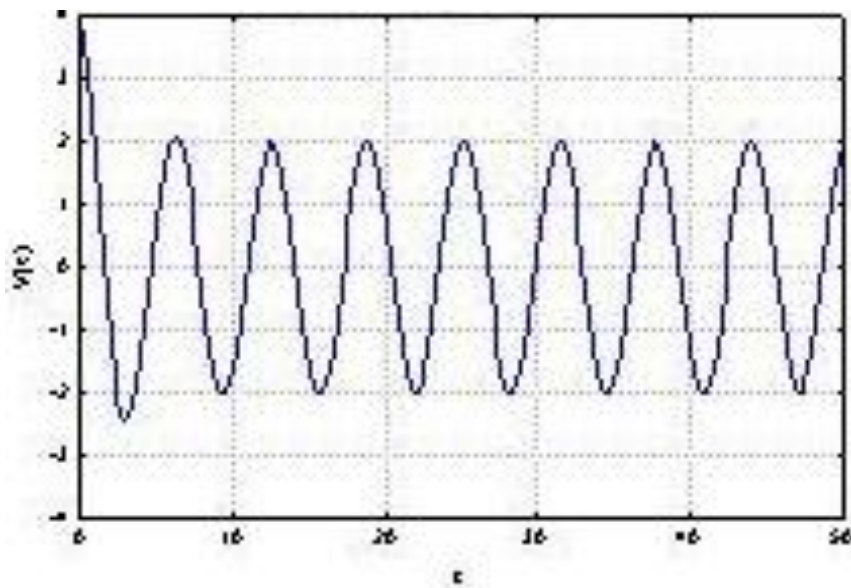


Figura 3.1.5d

Para grandes valores del parámetro  $\epsilon$ , la solución de la ecuación de Van der Pol tiene otra forma, como se ejemplifica en la siguiente figura para  $\epsilon=1000$ .

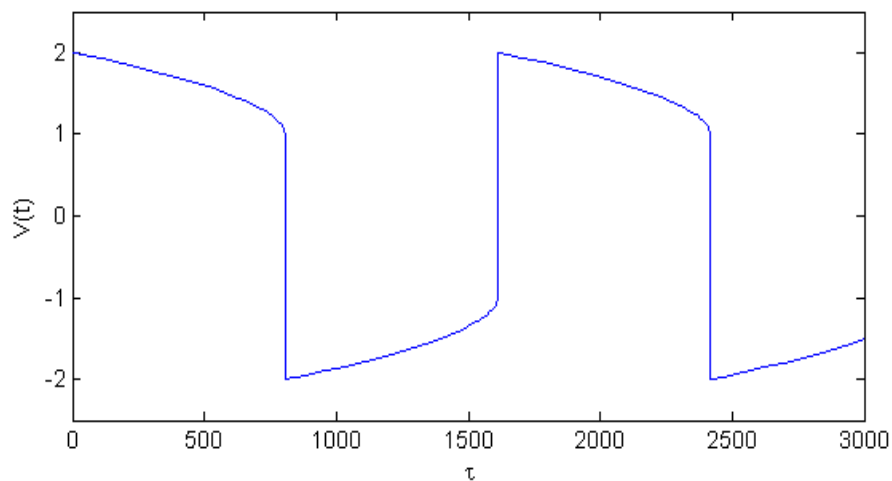
Tensión en el oscilador de Van der Pol para  $\epsilon = 1000$ 

Figura 3.1.5e



## CONCLUSIONES

- 1.- Los circuitos RLC se pueden describir con una ecuación diferencial de segundo orden cuya solución general incluye varios modos de oscilación.
- 2.- Los circuitos RLC conectados en serie deben ser estudiados considerando las impedancias mientras los RLC conectados en paralelo deben ser analizados teniendo en cuenta las admitancias.
- 3.- El término no lineal en el circuito de Van der Pol estabiliza las oscilaciones no permitiendo su amortiguamiento para grandes tiempos.

## RECOMENDACIONES

- 1.- Diseñar circuitos de Van der Pol experimentales para estudiar sus respuestas en condiciones de laboratorio.
- 2.- Incluir los circuitos RLC no lineales dentro de los programas de estudios de la carrera de la ingeniería.
- 3.- Estudiar las oscilaciones, las cuales puedan estabilizar los sistemas eléctricos y electrónicos para evitar el caos en el futuro.

## BIBLIOGRAFIA:

- **Alonso, M., Finn, E. J.** (1970). Física, vol.II, Campos y Ondas (Fondo Educativo Interamericano, Mexico.
- **Anant Agarwal, Jeffrey H. Lang**(2005).Foundations of analog and digital electronic circuits, Morgan Kaufmann.
- **Avendaño, L.E.** (1995), "Sistemas electrónicos lineales: Un enfoque matricial" Universidad Tecnológica de Pereira.
- **Borrelli, R., Courtney C.** (2002). Ecuaciones diferenciales: una perspectiva de modelación, Mexico,Oxford University Press.
- **Conejo, J., Clamagirand, A., Polo, J. L., Alguacil. N.** (2004) .Circuitos Eléctricos para la Ingeniería. McGraw-Hill. Madrid. ISBN: 84-481-4179-2.
- **Faleski M. C.** (May 2006).Transient behaviour of the driven RLC circuit. Am . J. Phys. 74 (5), pp. 429-437
- **Fernández Pérez, C., Vázquez Hernández, F.J., Vegas Montaner, J.M.** (2003).Ecuaciones diferenciales y en diferencias, Madrid, Thompson.
- **García Bertrand. R.** Transitorios en circuitos RLC. Departamento de Ingeniería Eléctrica, Electrónica, Automática y Comunicaciones. Universidad de Castilla –La Mancha.
- **Harris, J.W., Stocker, H.** (1998). Handbook of Mathematics and computational science. Springer .New York.
- **Horowitz, P., Hill, W.** (1989). *The art of electronics*, 2nd ed. (Cambridge University Press, Cambridge).

- **Josebachuili, M., Zurita, P.** (UBA 2005). Circuitos RLC forzados en serie y paralelo.
- **Kanamaru., Takashi.** Van der Pol oscillator, en Scholarpedia, 2(1), 2202, 2007, disponible en [http://www.scholarpedia.org/article/Van\\_der\\_Pol](http://www.scholarpedia.org/article/Van_der_Pol).
- **Kiseliov, A., Krasnov, M., Makarenko, G.** (1988). Problemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. MIR. Moscú.
- **Kreyszig, E.** (1991). Matemática Avanzadas para Ingeniería. Volumen I. Editores Noriega.
- **Kulakov, A., Rumiantset, A.** (1990). Introducción a la Física de Procesos no Lineales. MIR. Moscú.
- **Leyva, P.** (1985). Ecuaciones Diferenciales y sus Aplicaciones. 2da ed. Ciudad de La Habana: Pueblo y Educación.
- **Moon, F. C.** (1987). Chaotic Vibrations – An Introduction for Applied Scientists and Engineers – John Wiley & Sons. New York.
- **Nilsson, J. W., Riedel. S. A.** (2005) Circuitos Eléctricos. Séptima Edición. Pearson Prentice Hall. ISBN: 84-205-4458-8
- **Nocettii, M., Blenkman, A.** (UF 2002). Respuesta Temporal de Circuitos RLC Serie.
- **Pérez, P.** (1998). Cálculo Infinitesimal Asistido por Ordenadores. Dpto. Matemática Aplicada. Universidad Politécnica de Valencia: Servicios de Publicaciones; SPUPV98 - 1498.
- **Pontriaguin, L.S.** (1978). Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. 1ra ed. C. de la Habana: ed. Pueblo y Educación.

- **Purcell, E. M.** (1969). Berkeley physics course, volumen 2, Electricidad y Magnetismo. Reverté, Barcelona.
- **Salvador, G., Rodriguez, R.** (2002). Física Re-Creativa. Prentice Hall, Buenos Aires.
- **Sánchez, J.V., Sánchez, E.A. y García, L.M.** (1997).Curso de Prácticas de Matemáticas para primeros cursos de Ingeniería. Universidad Politécnica de Valencia.
- [www.terra.es/personal2/equipos2/rlc.htm](http://www.terra.es/personal2/equipos2/rlc.htm)
- <http://www.labc.usb.ve/mgimenez/Ec1181ele/Material/Circuitos%2520RLC/Circuitos%2520RLC.pdf>
- <http://iie.fing.edu.uy/ense/assign/dsp/proyectos/1999/oscilador/pweb.htm>
- [www.redalyc.org](http://www.redalyc.org)
- [http://ar.geocities.com/labo3\\_uba](http://ar.geocities.com/labo3_uba)
- [http://ar.geocities.com/labo5\\_uba](http://ar.geocities.com/labo5_uba)
- <http://www.df.uba.ar/users/sgil>
- [http://www.scholarpedia.org/article/Van der Pol](http://www.scholarpedia.org/article/Van_der_Pol)

## ANEXOS

### Análisis en el laboratorio de Física II





## Laboratorio de Física II Universidad de Granma



## Trabajando en el Laboratorio de Física II



**Junto a nuestro tutor el Físico Humberto Millán Ph.D.**

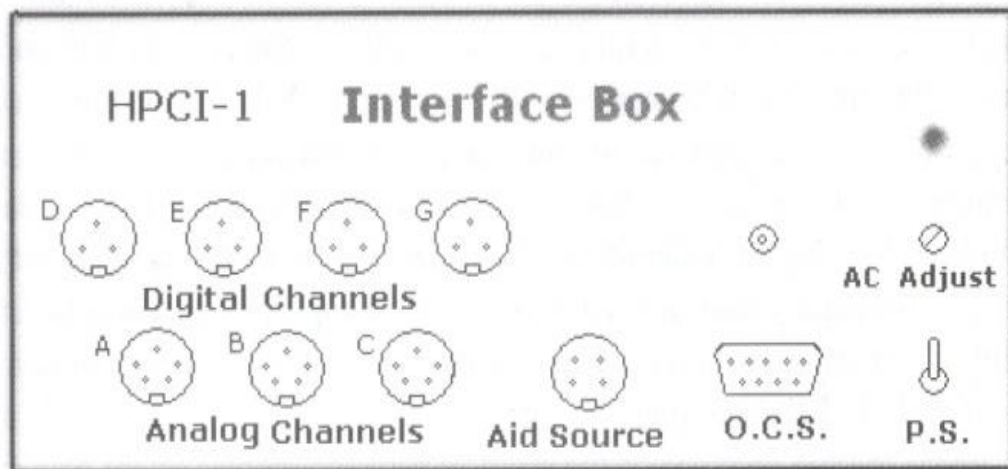


**Investigadores Alex y David**





## Interface HPCI-1



A: Gain=1, 10, 100, 500; Differential input

B: Gain=1

C: Gain=1

D, E, F, G: Resolving Power  $1.45 \mu s$

